Introduction élémentaire à la théorie des jeux

Marc Deschamps
Université de Franche-Comté et CRESE

marc.deschamps@univ-fcomte.fr

2022

Remerciements

Je tiens à remercier mes professeurs, devenus collègues, coauteurs et amis Pierre Bernhard (INRIA) et Sylvain Béal (CRESE).

Ce sont eux qui m'ont appris ce que je sais et qui me permettent de progresser et d'explorer les questions économiques qui m'intéressent. Ils ne sont évidemment pas responsables de mes erreurs et approximations.

Objectifs du cours

- Vous offrir une **présentation non-technique et introductive** à la théorie des jeux

- Vous exposer le **rôle et l'utilité** de la théorie des jeux en économie

- Vous fournir des outils pour mieux comprendre **l'actualité**

Plan du cours

1. Introduction
2. Stratégies dominantes
3. Equilibre de Nash
4. Valeur de Shapley
5. Conclusion
6. Bibliographie

Manuels recommandés pour ce cours d'introduction

- Béal, S. et Gabuthy, Y. [2018], *Théorie des jeux coopératifs et non-coopératifs : application aux sciences sociales*, De Boeck
- Eber, N. [2013], *Théorie des jeux*, Dunod, 3ème édition
- Guerrien, B. [2002], *La Théorie des jeux*, Economica
- Yildizoglu, M. [2003], *Introduction à la théorie des jeux*, Dunod

Ouvrages

- Kreps, D. [1999], *Théorie des jeux et modélisation économique*, Dunod
- Nasar, S. [2001], *Un cerveau d'exception*, Calmann-Lévy
- Pastine, I. et Pastine, T. [2018], *La théorie des jeux en images*, EDP Sciences
- Poundstone, W. [2003], *Le dilemme du prisonnier. Von Neumann, la théorie des jeux et la bombe*, Cassini
- Binmore, K. [2015], *La théorie des jeux*, Les éditions arkhê

Cours n°1

Introduction

Plan

1. Comment raisonnent les économistes ?
2. Définitions de la théorie des jeux
3. Eléments d'un jeu
4. Principaux types de jeux
5. Utilisations de la théorie des jeux
6. Brève histoire de la théorie des jeux
7. Trois formes d'un jeu

Comment raisonnent les économistes (B. Walliser [2011])

- « Les modèles sont devenus l'expression privilégiée du savoir économique » [p. 7]
- Modèle = « système formel qui représente un système réel à diverses fins » [p. 9]
- Un modèle est un **artefact**
- Un modèle exerce un **filtrage de la réalité** perçue en n'en retenant que les aspects les plus pertinents (c'est une épure) afin de pouvoir raisonner

Comment raisonnent les économistes (B. Walliser [2011])

- Tout modèle peut être analysé selon trois dimensions :
  - Sa **syntaxe** (propriétés logico-mathématiques)
  - Sa **sémantique** (correspondance avec le système de référence)
  - Sa **sémiotique** (significations qui lui sont accordées)
- Selon B. Walliser, tout modèle remplit six fonctions. Nous suivons ici sa présentation.

La fonction « Iconique »

- **Rôle de langage de représentation rigoureuse d'un système**
- Problème épistémique : quelle est la signification accordée à ce modèle ?
- « Connaître, c'est représenter »
- Interprétation instrumentaliste de la théorie des jeux VS Interprétation réaliste de la théorie des jeux
- Exemple : la stratégie mixte en théorie des jeux

La fonction « Syllogistique »

- **Modalité d'inférence des conclusions du modèle à partir de ses hypothèses**
- Problème épistémique : quel est le pouvoir explicatif du modèle ?
- « Connaître, c'est calculer »
- Robustesse syntaxique = sensibilité des conséquences formelles à une variation d'hypothèse
  - Sur-robustesse = « effet d'entonnoir »
  - Sous-robustesse = « effet de clairon »

La fonction « Empirique »

- **Rapport entre le modèle et les données empiriques recueillies sur le système**
- Problème épistémique : quel est le degré d'idéalité du modèle ?
- « Connaître, c'est tester »
- Problème des grandeurs théoriques sans contrepartie mesurable (ex : le coût marginal)
- Erreur de type 1 = faux-positif (rejet)
- Erreur de type 2 = faux-négatif (acceptation)

La fonction « Heuristique »

- **Articulation entre le modèle et les modèles antérieurs**
- Problème épistémique : quel est le niveau de cumulativité de ce modèle ?
- « Connaître, c'est créer »
- Théorie = classe de modèles
- Cumulativité :
  - Syntaxique (plus fort logiquement)
  - Sémantique (plus vaste domaine d'application)
  - Interprétative (significations plus nombreuses et nuancées)

La fonction « Praxéologique »

- **Utilisation du modèle pour modifier le système en fonction des préférences du décideur**
- Problème épistémique : quelle est l'instrumentalité du modèle ?
- « Connaître, c'est intervenir »
- Exemple : utilisation de la valeur de Shapley pour la répartition des coûts

La fonction « Rhétorique »

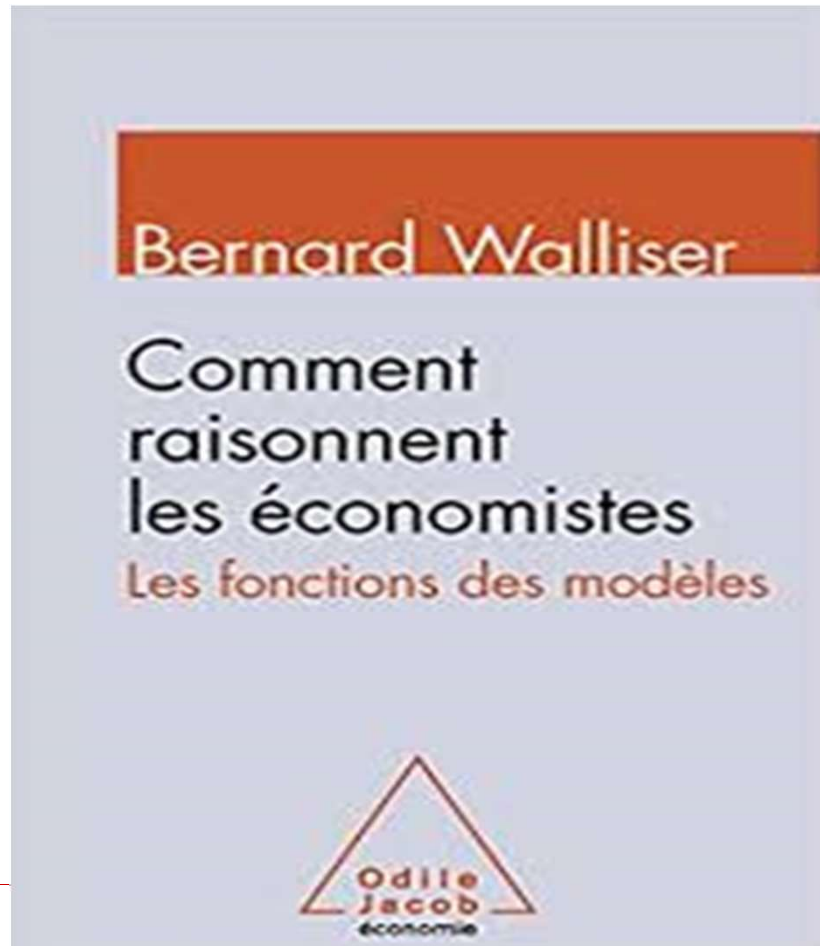
- **Diffusion du modèle auprès des acteurs intéressés et leurs réactions**
- Problème épistémique : quelle est la performativité du modèle ?
- « Connaître, c’est communiquer »
- La vulgarisation est une double idéalisation
- Performativité :
  - *Actoriale* = impact sur les croyances et les comportements des agents économiques
  - *Systémique* = impact sur les caractéristiques collectives du système et l’influence de celles-ci sur les acteurs

Désaccords

Les économistes sont en désaccord, généralement pour au moins une des trois raisons suivantes :

- l’existence du problème
- une divergence sur le modèle
- une divergence sur la façon de quantifier les grandeurs concernées

Conseil de lecture



Définitions de la théorie des jeux

- « […] discipline qui étudie les situations de concurrence et de coopération entre plusieurs parties prenantes » H. Peters [2008, p. 1]
- « La théorie des jeux concerne le comportement de décideurs (*joueurs*) dont les décisions s'affectent mutuellement » R. Aumann [2018, p. 5014]

Eléments d'un jeu

- Des joueurs
- Des décisions
- Déroulement des décisions
- Information
  - Parfaite/Imparfaite
  - Complète/Incomplète
- Des paiements

Principaux types de jeux

- **Jeux à somme nulle** (la somme des gains et des pertes de l'ensemble des joueurs est égale à 0)
- **Jeux coopératifs** (Les joueurs peuvent conclure des accords et/ou faire des menaces et/ou faire des promesses exécutoires –i.e. qui les engagent de manière irrévocable–. Les données de base sont les groupes et les problèmes étudiés sont la formation des coalitions et le partage des paiements)
- **Jeux non-coopératifs** (Les joueurs ne peuvent pas prendre d'engagements contraignants avant d'agir et l'accent est mis sur leurs stratégies. On peut faire émerger des comportements coopératifs dans un jeu non-coopératif, c'est-à-dire sans avoir besoin de former une coalition)

Utilisations de la théorie des jeux

- Les outils et les concepts de la théorie des jeux sont utilisés pour formaliser les situations de conflits et de coopération dans un **grand nombre de disciplines**
- En économie, elle est devenue **l'une des méthodes centrales** (microéconomie et macroéconomie)
- La suite du cours vous donnera des exemples d'applications

Brève histoire de la théorie des jeux

Nous allons faire une présentation rapide et épurée en distinguant :

- Les précurseurs
- Les fondateurs
- Les prix en la mémoire d'Alfred Nobel

Les principaux précurseurs

- Antoine Augustin Cournot [1838]
- Joseph Bertrand [1883]
- Louis Bachelier [1901]
- Ernst Zermelo [1912]
- Emile Borel [1921] [1924]
- John Von Neumann [1928]
- Heinrich von Stackelberg [1934]

Les fondateurs [1944]

J. von Neumann

O. Morgenstern

Source : https://fr.wikipedia.org/wiki/John_von_Neumann et
https://blogs.library.duke.edu/rubenstein/2013/04/26/newly-rediscovered-papers-of-a-game-theory-pioneer/

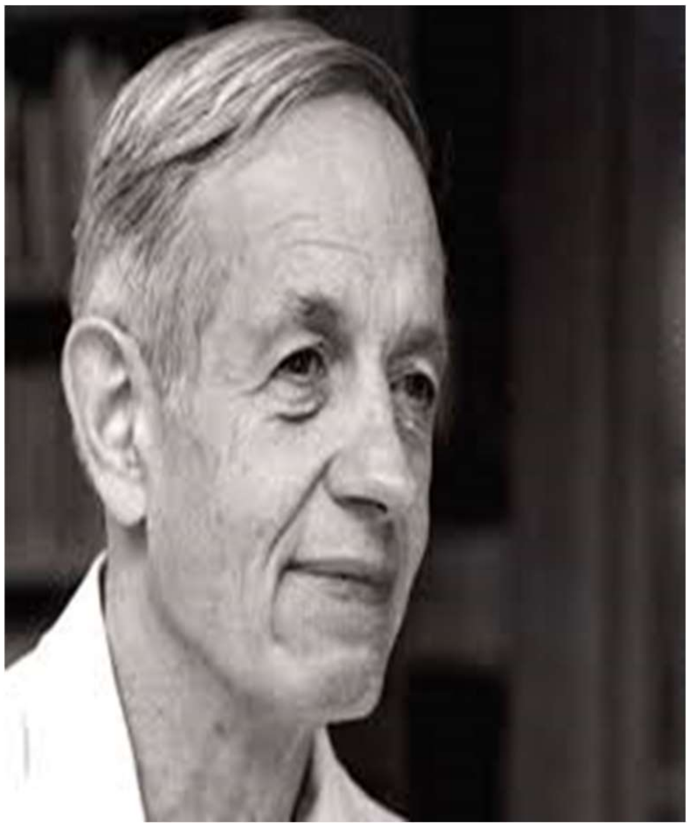
Les prix
en la mémoire d'Alfred Nobel

- 1994 : J. Nash, J. Harsanyi, R. Selten
- 2005 : R. Aumann et Th. Schelling
- 2012 : A. Roth et G. Shapley

Et aussi…

- 1996 : W. Vickrey et J. Mirrlees
- 2001 : G. Akerlof, M. Spence et J. Stiglitz
- 2007 : L. Hurwicz, E. Maskin et R. Myerson
- 2014 : J. Tirole

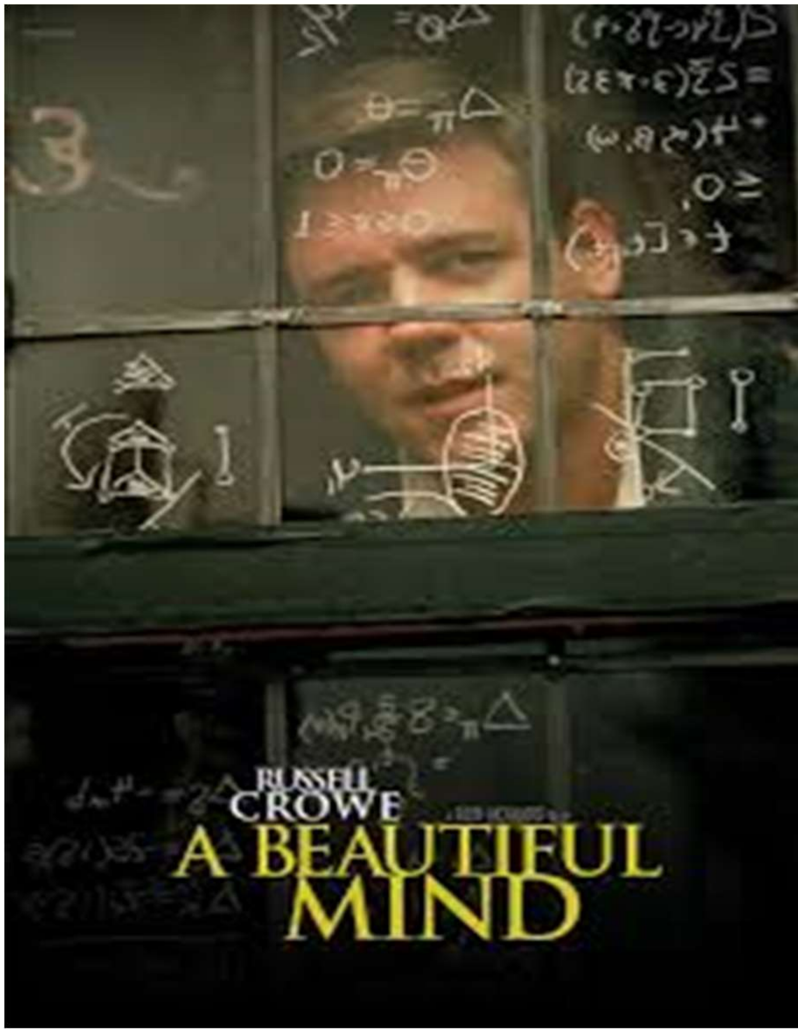
John Nash (1928-2015)

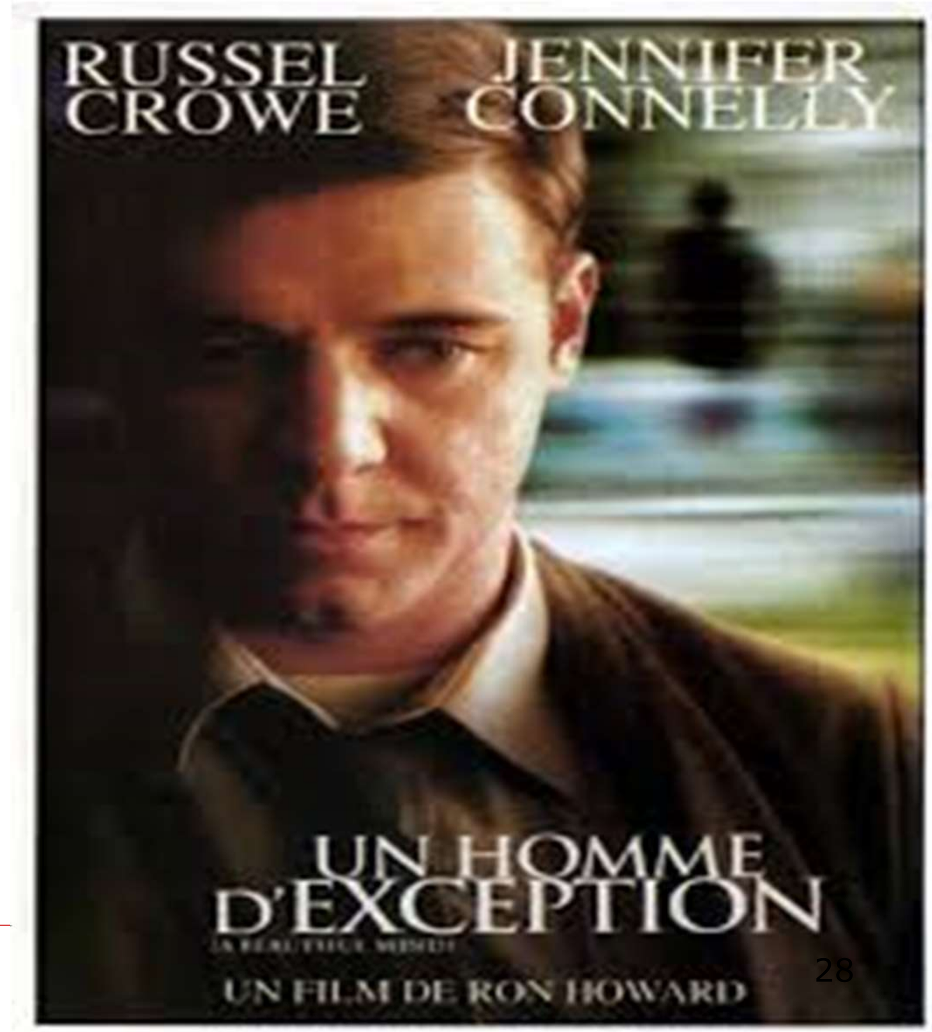


- Mathématicien et économiste américain
- Il est à l'origine du concept central d'équilibre en théorie des jeux non-coopératifs
- Il est également l'auteur de contributions essentielles en mathématiques

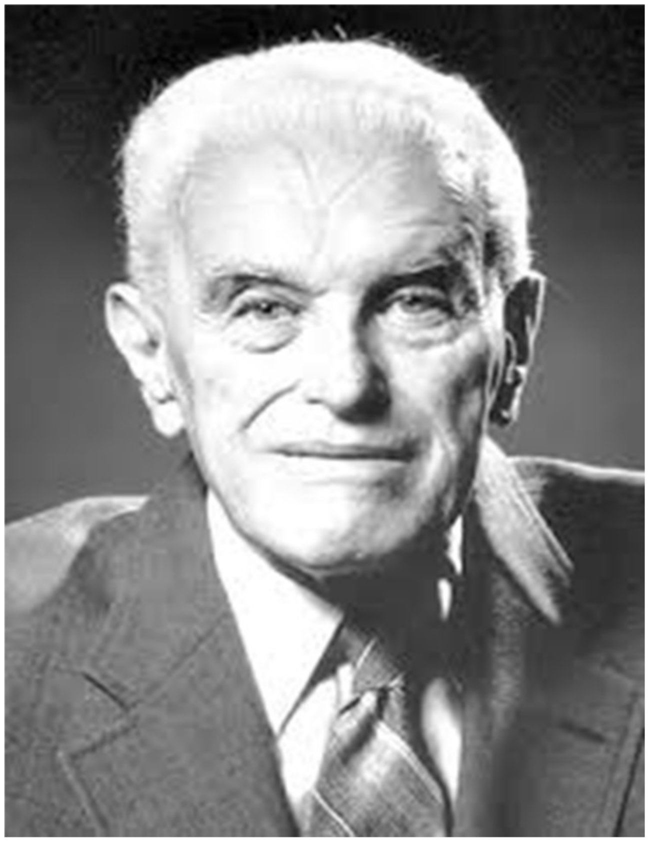
Source : https://www.bibmath.net/bios/index.php?action=affiche&quoi=nash

Film à voir


RUSSELL
CROWE
A BEAUTIFUL
MIND


RUSSEL
CROWE
JENNIFER
CONNELLY
UN HOMME
D'EXCEPTION
UN FILM DE RON HOWARD

John Harsanyi (1920-2000)



- Economiste d'origine hongroise
- Docteur en philosophie et en économie
- Il propose notamment une modélisation probabiliste pour étudier les jeux en information incomplète

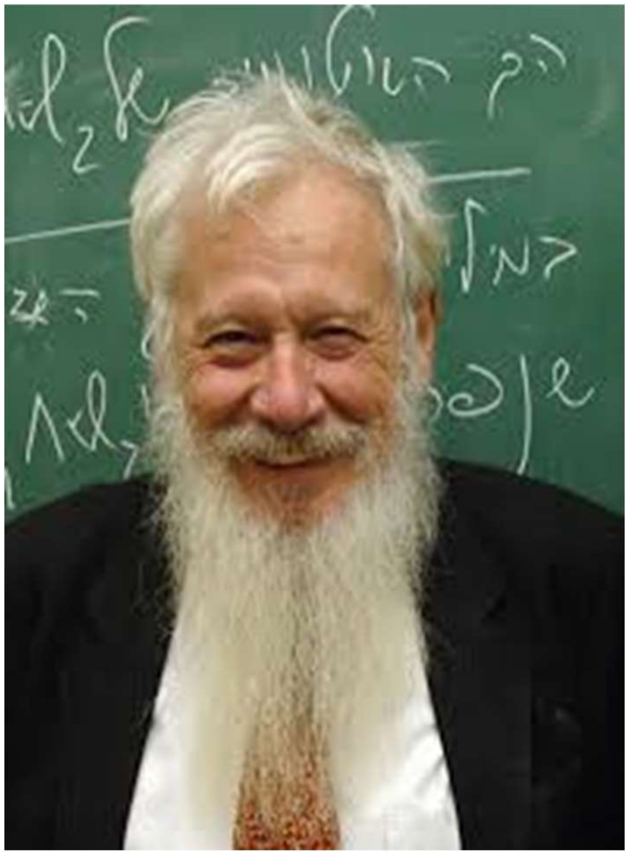
Source : https://www.nobelprize.org/prizes/economic-sciences/1994/harsanyi/biographical/

Reinhard Selten (1930-2016)

- Economiste allemand
- Il a travaillé avec O. Morgenstern
- Il propose une solution pour réduire le problème de la multiplicité des équilibres de Nash
- Il est l'un des pionniers de l'économie expérimentale

Source : https://elitepresse.com/affaires/mort-de-lallemand-reinhard-selten-prix-nobel-deconomie/

Robert Aumann (né en 1930)



- Mathématicien et économiste israélo-américain
- Il a fait de nombreuses contributions, notamment dans le domaine des jeux répétés
- Il est l'un des fondateurs de l'école israélienne d'économie mathématique

Source : https://mathematics.huji.ac.il/people/robert-j-aumann

Thomas Schelling (1921-2016)

- Economiste américain
- Professeur de politique étrangère, sécurité nationale et de contrôle des armes
- Il est particulièrement connu pour être à l'origine des notions de *point focal*, et de *crédibilité stratégique*

Source : https://pubsonline.informs.org/do/10.1287/orms.2017.01.19in/full/

Définition de la théorie des jeux

« Je définis la théorie des jeux comme l'étude de la question suivante : comment des individus rationnels opèrent-ils des choix, quand le meilleur choix entre deux options, ou le meilleur choix entre plusieurs possibilités, dépend en fait des choix que feront ou sont en train de faire d'autres personnes ? » Th. Schelling [2007, p. XI]

Le solitaire de Schelling (1)

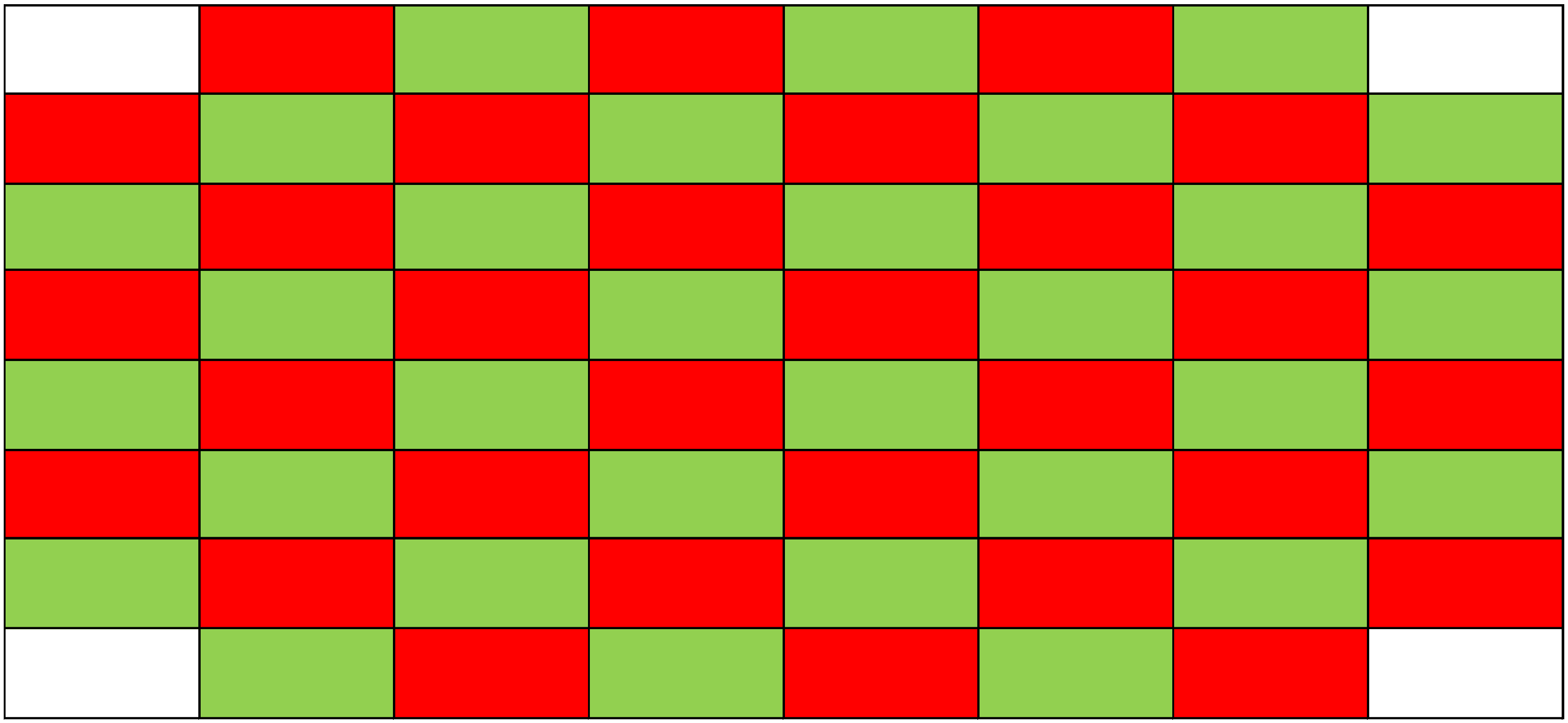
Règles du jeu :

- Un échiquier de 64 cases (8 x 8)
- 60 cases occupées (donc 4 cases vides)
- Un nombre égal de « rouge » et de « vert »
- Chacun souhaite avoir *plus* d'un tiers de voisins appartenant à son groupe
- Chacun ne peut se déplacer sur une case que si celle-ci est vide et il n'y a qu'un seul déplacement par pas de temps

Le solitaire de Schelling (2)

Nombre de voisins possibles	**Nombre de voisins du même groupe (pour avoir une proportion de *plus* d'un tiers de son groupe)**
0	0
1	1
2	1
3	2
4	2
5	2
6	3
7	3
8	3

Le solitaire de Schelling (3)



Le solitaire de Schelling (4)

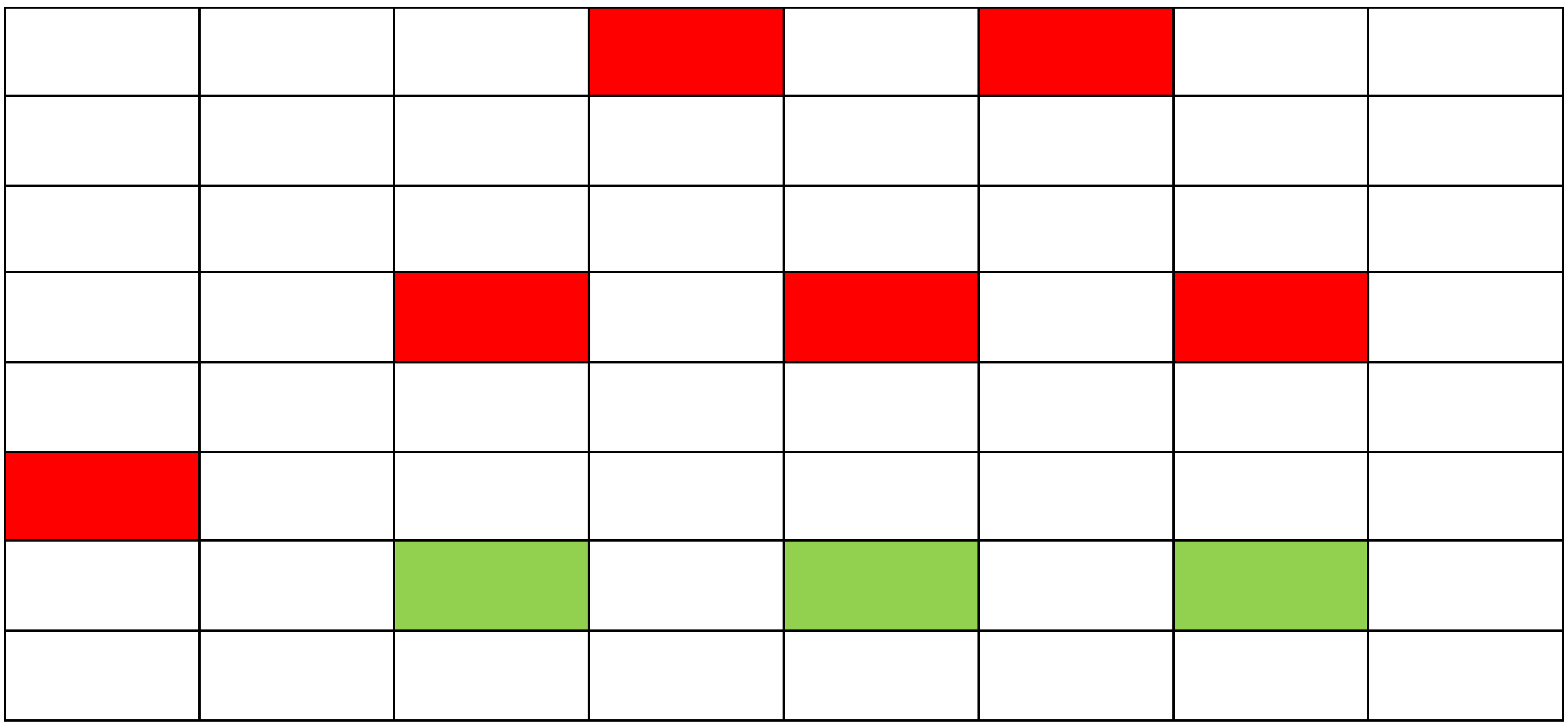
- On vide 20 cases au hasard
- On choisit au hasard 5 cases vides et l'on remplace à égalité de chance par un « vert » ou un « rouge » chacune d'entre elles

=> Sur les 64 cases il y a donc 45 cases occupées (40 occupent la même case qu'auparavant) et 19 cases vides

Le solitaire de Schelling (5)

Le solitaire de Schelling (6)

Individus insatisfaits (6 « rouge » et 4 « vert »)

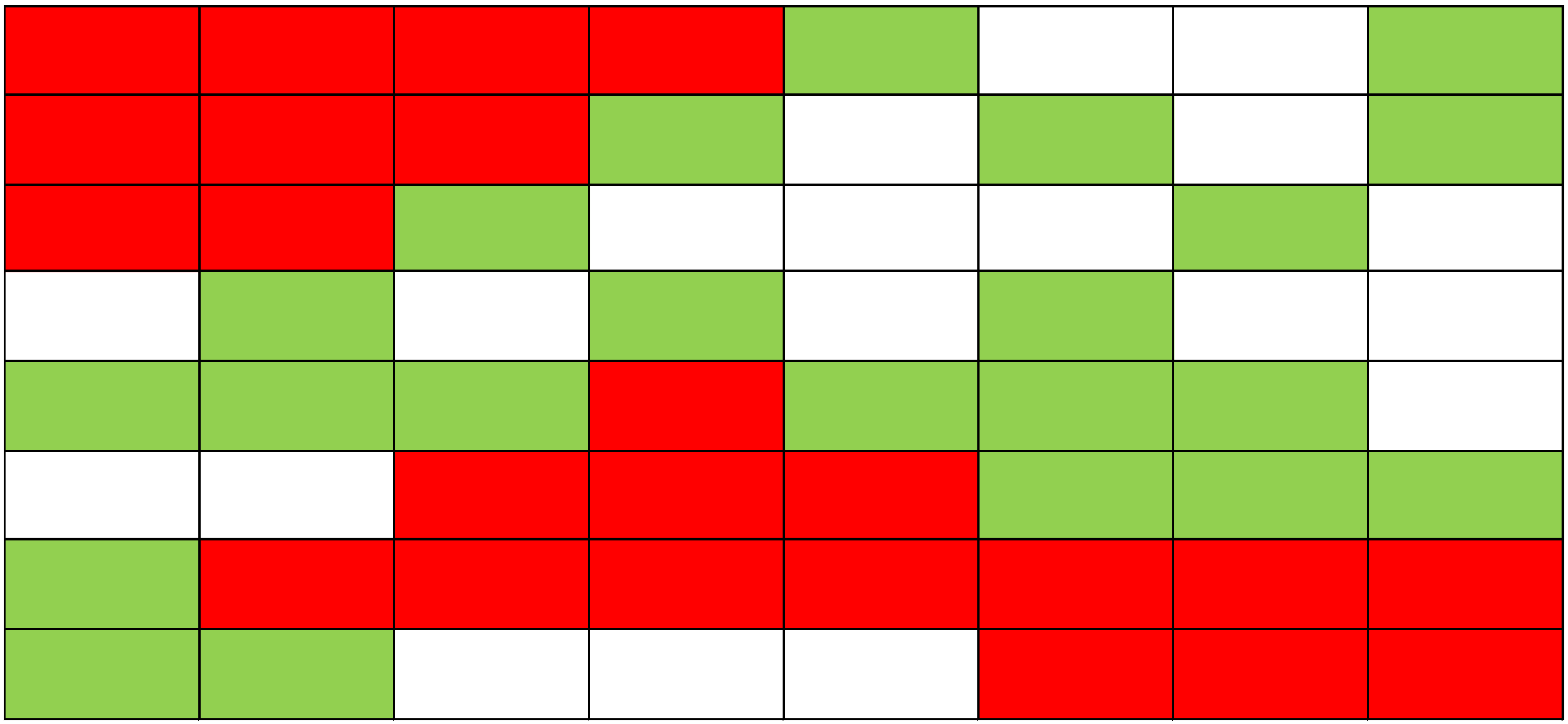


Le solitaire de Schelling (7)

- N’importe quel individu qui se déplace entraîne :
  - Une case vide là où il était
  - Un changement pour ses anciens voisins
  - Un changement pour ses nouveaux voisins

- Réaction en chaîne

Le solitaire de Schelling (8)



NB : le jeu n’est pas terminé mais permet de voir la conclusion (i.e. la ségrégation)

Le solitaire de Schelling (9)

- Hypothèses du modèle
  - Mélange dichotomique
  - Taille du cadre
  - Nombre d'individus de chaque groupe
  - Préférences des individus de chaque groupe
  - Nombre de cases vides
  - Information parfaite et complète
- Critères de comparaison
  - Proportion moyenne de voisins identiques
  - Nombre d'individus qui n'ont pas de voisins différents

Le solitaire de Schelling (10)

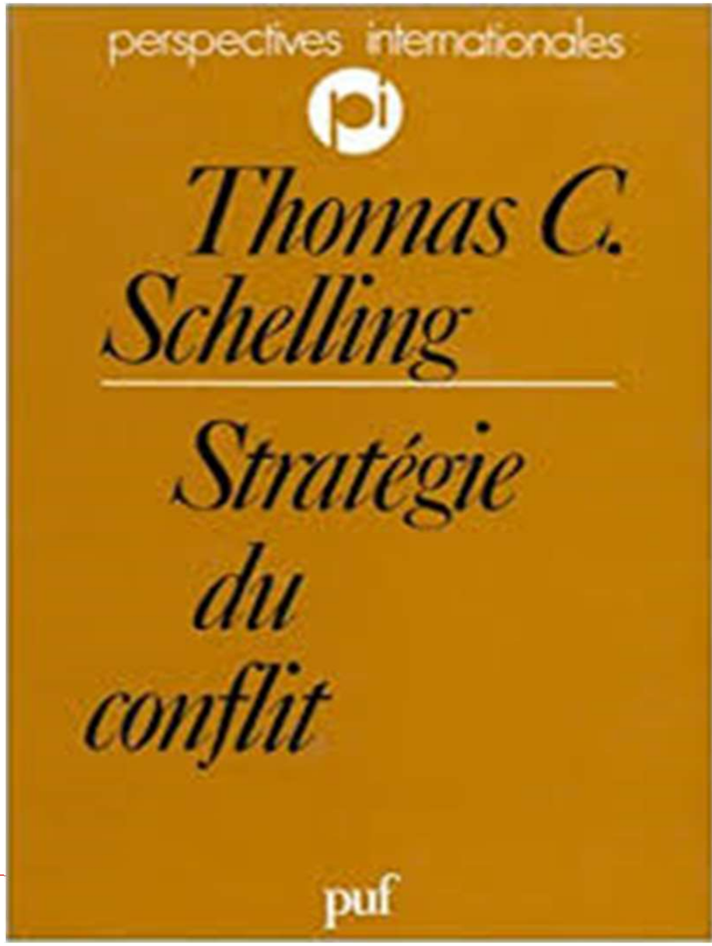
- « Un désir modéré de ne pas se trouver en petite minorité peut entraîner l'effritement d'un modèle dont l'intégration était presque parfaite et la formation d'environnements caractérisés par une forte ségrégation » Th. Schelling [2007, p. 140]
- **L'agrégation de micro-comportements peut conduire à un résultat que personne ne désire, ni ne prévoit**
- Comment éviter la ségrégation ?
  - Inviter des individus extérieurs à entrer
  - Repositionner un petit nombre d'individus

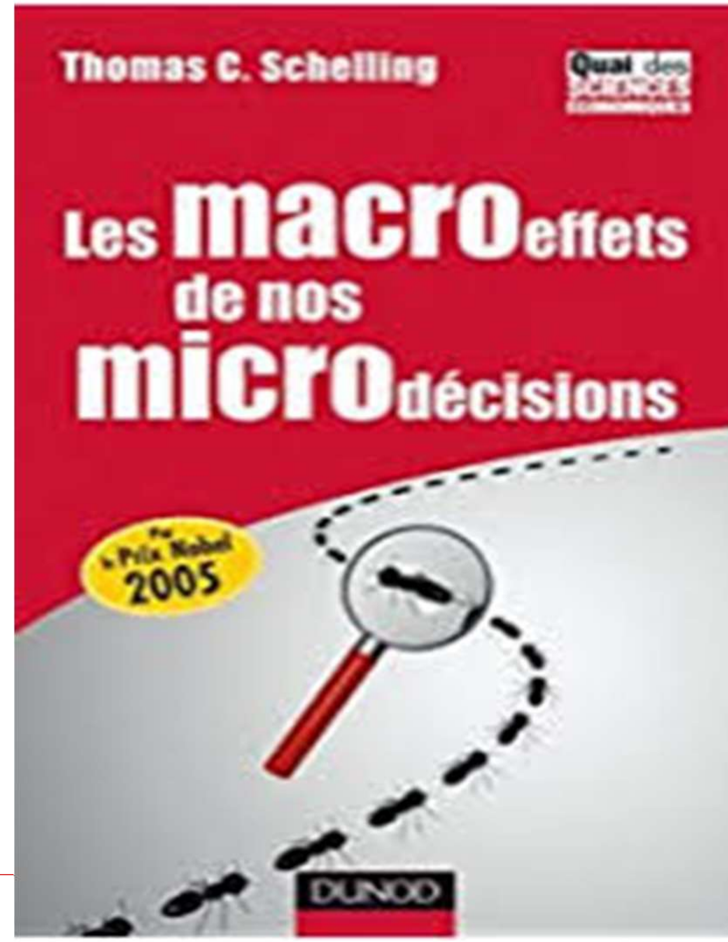
Modèle

« Les modèles tendent à n’être utiles que lorsqu’ils sont à la fois assez simples pour s’appliquer à une variété de comportements, et assez complexes pour convenir à des comportements qui nécessitent l’aide d’un modèle explicatif »

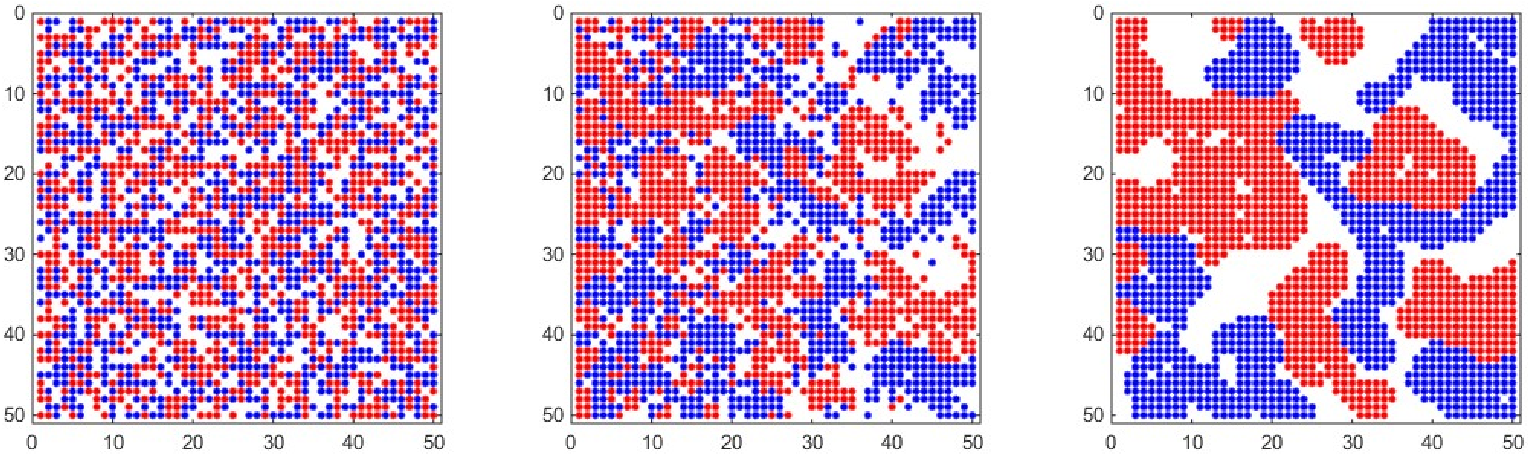
Th. Schelling [2007, p. 77]

Conseil de lecture





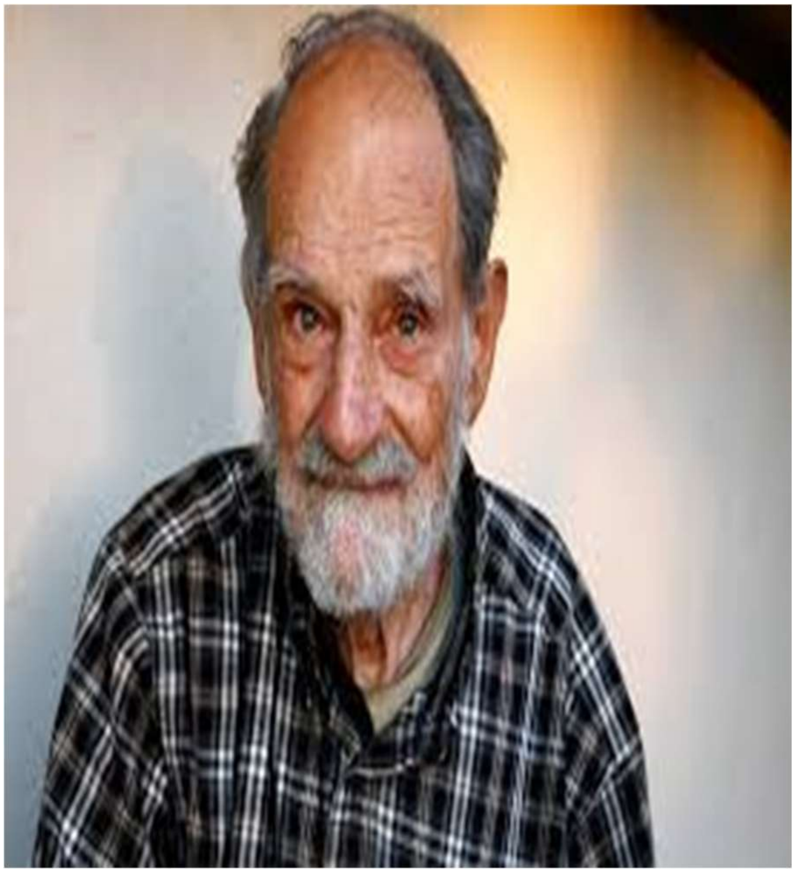
Simulations informatiques du solitaire de Schelling et de ses variantes



Il existe de nombreux sites Internet offrant des programmes de simulation du solitaire de Schelling et de ses variantes, vous pouvez notamment vous reporter à :

http://faculty.ucr.edu/~hanneman/spatial/schelling/schelling.html#toc

Lloyd Shapley (1923-2016)



- Mathématicien et économiste américain
- Il a cassé le code météorologique soviétique en 1943
- Ses contributions sont extrêmement nombreuses, en particulier dans les jeux coopératifs

Source : https://www.science.org/doi/10.1126/science.338.6105.314

Algorithme de Gale-Shapley (1)

- Un **algorithme** c'est « une méthode efficace pour faire faire quelque chose, même à une machine complètement stupide » *Les Sépas 18 les algorithmes* (https://www.youtube.com/watch?v=hG9Jty7P6Es)
- Comme le soulignent A. Alvarez et Th. Viéville [2014] : « On obtient un algorithme lorsque l'on a *évacué la pensée d'un procédé et réduit les choses à un simple calcul* »

Pour plus de détails voir http://images.math.cnrs.fr/Dis-maman-ou-papa-c-est-quoi-un-algorithme-dans-ce-monde-numerique

Algorithme de Gale-Shapley (2)

- Article de 1962 portant sur l'admission des étudiants dans les universités où les auteurs utilisent une métaphore : le mariage (*Algorithme d'acceptation différée*)
- Caractéristiques :
  - Relation de préférence stricte, transitive et complète
  - Association par paire
  - Mécanisme centralisé d'appariement

Algorithme de Gale-Shapley (3)

Etape 1

Chaque homme fait, selon sa relation de préférence, une proposition à une femme. S'il préfère rester célibataire il le reste définitivement (la procédure s'arrête pour lui). Chaque femme accepte provisoirement la proposition de l'homme qu'elle préfère parmi ceux qui lui ont fait une proposition (ou à elle-même si elle préfère rester célibataire). Les autres offres qui lui sont faites sont rejetées.

Etape 2, 3, etc.

Chaque homme dont la proposition est rejetée à l'étape précédente fait une proposition à une autre femme qui ne l'a pas encore rejeté ou à lui-même. Dans ce dernier cas il reste définitivement célibataire

Algorithme de Gale-Shapley (4)

Résultats :

- **La procédure s’arrête en un nombre fini d’étapes** et chaque homme est alors apparié à une femme ou à lui-même
- Cet appariement est **stable**

Algorithme de Gale-Shapley (5)

Femmes

- Halle Berry

- Gisele Bündchen

- Eva Mendes

Hommes

- Theo James

- Ryan Reynolds

- Will Smith

Algorithme de Gale-Shapley (6)

Theo	Ryan	Will	Halle	Gisele	Eva
Gisele	Halle	Halle	Theo	Will	Theo
Halle	Gisele	Gisele	Ryan	Theo	Ryan
Theo	Eva	Eva	Will	Ryan	Will
Eva	Ryan	Will	Halle	Gisele	Eva

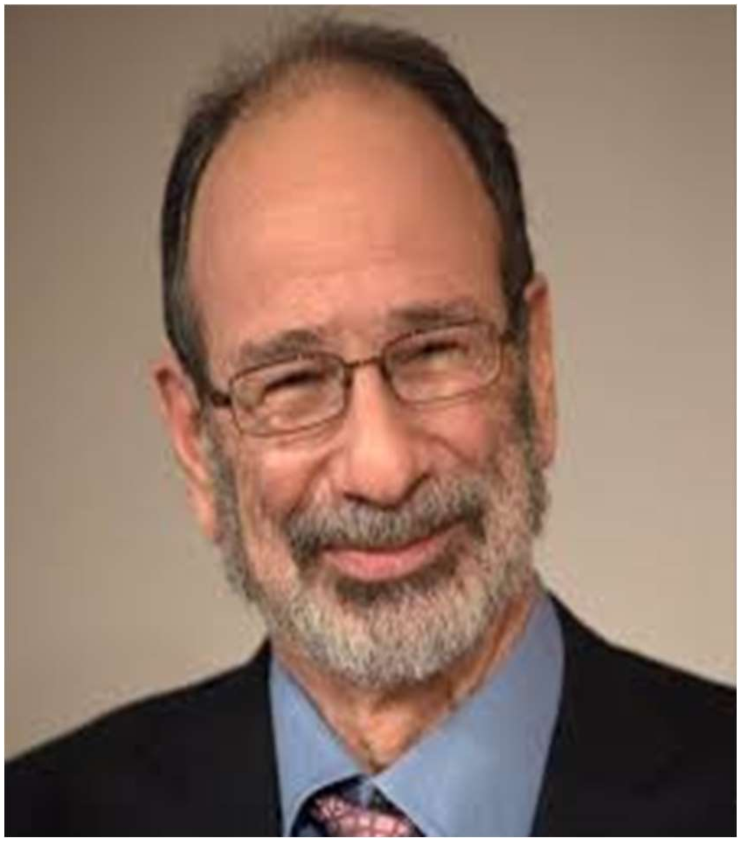
Algorithme de Gale-Shapley (7)

- Etape 1 : Theo propose à Gisele, Ryan et Will proposent à Halle => Gisele est appariée à Theo et Halle est appariée à Ryan
- Etape 2 : Will propose à Gisele => Gisele est appariée à Will
- Etape 3 : Theo propose à Halle => Halle est appariée à Theo
- Etape 4 : Ryan propose à Gisele => Gisele reste avec Will
- Etape 5 : Ryan propose à Eva => Eva est appariée à Ryan

Au final, tous les individus sont en couple et cet appariement est stable :

Theo – Halle
Ryan – Eva
Will – Gisele

Alvin Roth (né en 1951)



- Economiste et mathématicien américain
- Il a réalisé ses principales contributions dans le domaine des allocations stables
- Il est l'un des précurseurs de l'ingénierie économique

Source : https://en.wikipedia.org/wiki/Alvin_E._Roth

Design de marché

- L'Association Américaine de Médecine a fait appel à A. Roth en 1995 car de nombreux jeunes internes sont mariés et cherchent un poste en couple. Il trouve un nouvel algorithme, lequel assure chaque année l'attribution des 20 000 postes d'internes américains
- Répartition des élèves dans les écoles publiques
- Allocation des reins

Utilisation en France

- Affectation en collège et en lycée au niveau des académies (*Affelnet*)
- Entrée des étudiants en 1ère année (*Admission Post Bac*) (NB : aujourd'hui le système a changé et il s'agit de *Parcoursup*)
- Recrutement des enseignants-chercheurs (*Galaxie*)

Conseil de lecture

Roger Myerson (né en 1951)

- Economiste et mathématicien américain
- Il a été reconnu pour ses apports dans le domaine de la théorie des mécanismes d’incitation
- Il est le créateur des jeux de Poisson

Source : https://home.uchicago.edu/~rmyerson/

Trois formes d’un jeu

Classiquement on distingue :

- Forme normale
- Forme extensive
- Forme coalitionnelle

Forme normale (1)

- Cela correspond pour les jeux à deux joueurs à un **tableau** à double entrées. Les lignes correspondent aux stratégies du Joueur 1 et les colonnes aux stratégies du Joueur 2
- Chaque **intersection** d'une ligne et d'une colonne représente une **issue du jeu** et les paiements qui lui sont associés. Par convention, le premier paiement correspond à celui du Joueur 1, celui dont les stratégies sont en ligne

Forme normale (2)

Un jeu sous forme normale (ou stratégique) est défini par :

- Un ensemble de joueurs
- Un ensemble de stratégies pour chacun des joueurs
- Un ensemble d'issues du jeu (lesquelles correspondent à l'interaction entre les stratégies des différents joueurs –une pour chacun d'entre eux–)
- Une fonction de paiement (i.e. fonction d'utilité) pour chaque joueur, laquelle donne le paiement de chaque joueur à chaque issue du jeu

Exemple

		Jean-Pierre	
		Billard	Cinéma
Céline	Billard	20 ; 20	25 ; 15
	Cinéma	14 ; 20	30 ; 30

Forme extensive (1)

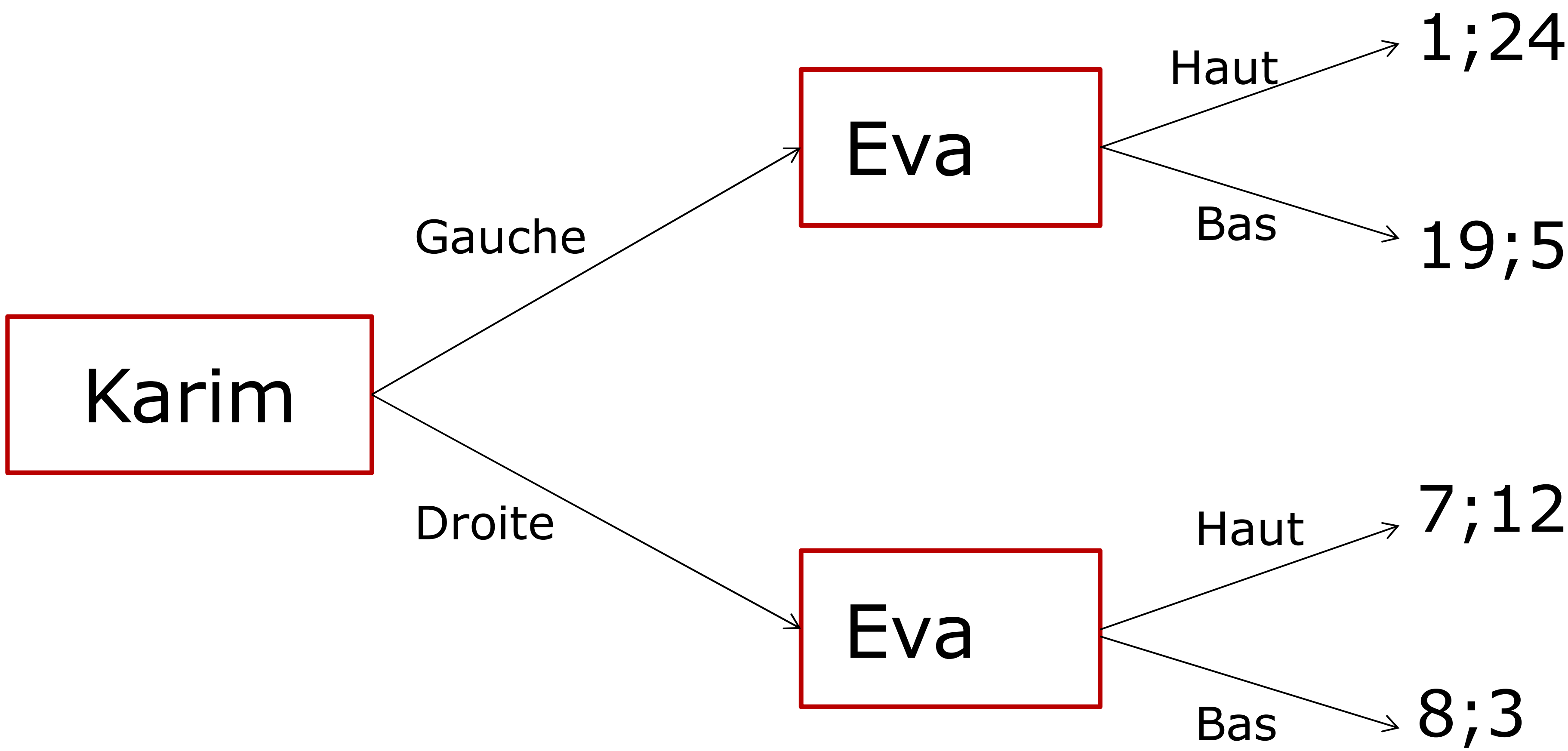
- Cela correspond à un **arbre**
- *ATTENTION : plusieurs représentations en forme extensive peuvent correspondre au même jeu sous forme normale*
- Information
  - Parfaite => chaque ensemble d'information ne contient qu'un seul nœud
  - Imparfaite => au moins un ensemble d'information contient plusieurs nœuds

Forme extensive (2)

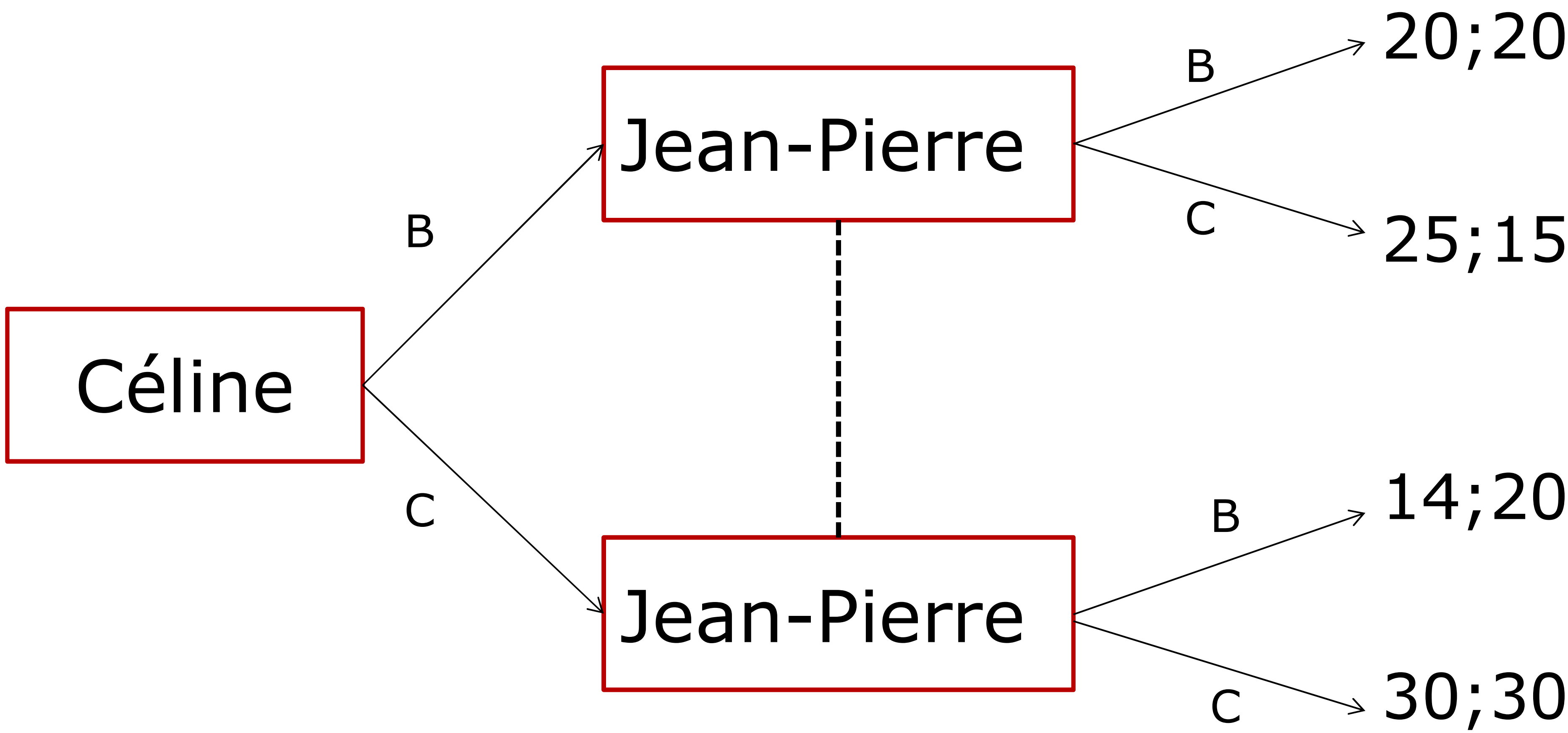
Un jeu sous forme extensive (arbre de jeux) en information complète est défini par :

- Un ensemble de joueurs
- Un nœud initial
- Un ensemble de branches correspondant aux actions possibles des joueurs
- Des ensembles d'information
- Des nœuds terminaux donnant les paiements de chacun des joueurs

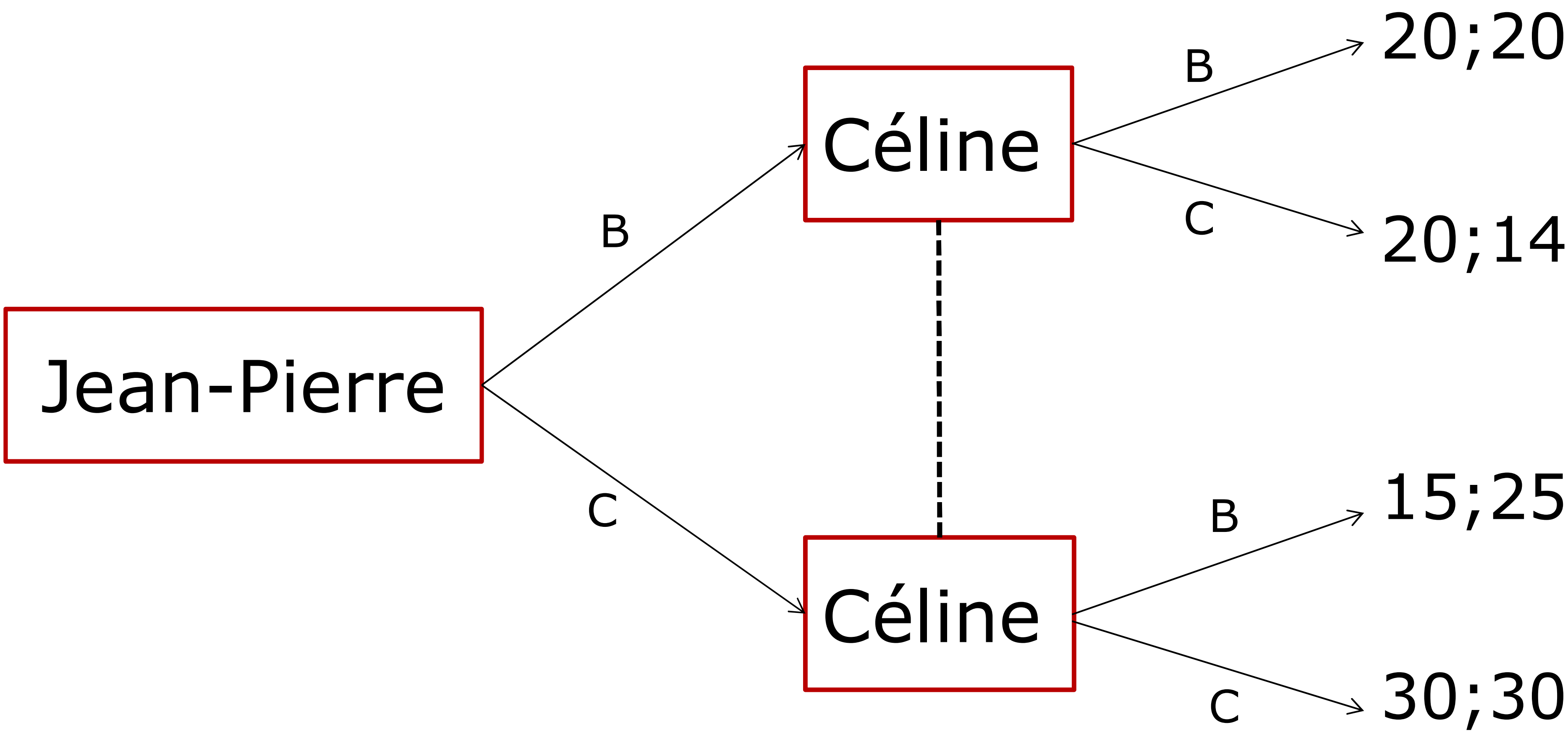
Exemple



Exemple Céline/Jean-Pierre (1)



Exemple Céline/Jean-Pierre (2)



Actions et stratégies

- **Une stratégie d'un joueur correspond à un plan de jeu**. C'est-à-dire qu'elle va indiquer ce que le joueur va jouer à chaque fois où il doit jouer
- Dans le cas où le joueur ne joue qu'une seule fois, action et stratégie sont confondues. Mais dans la majorité des cas elles ne le sont pas car une stratégie est une liste d'actions décrivant ce que le joueur jouera chaque fois que cela sera à lui de jouer

Forme coalitionnelle (1)

- **Forme caractéristique ou coalitionnelle**
- C’est la forme la plus usuelle pour représenter les jeux coopératifs
- Elle correspond à un **tableau** dans lequel on a les différentes coalitions possibles (compte tenu de l’ensemble fini des joueurs) avec la capacité associée à chacune d’entre elles

Forme coalitionnelle (2)

Un jeu coopératif à utilité transférable (ou jeu coopératif) est une paire (*N*, *v*) où :

- *N* est l'ensemble des *n* joueurs participant au jeu
- $v : 2^N \to \mathbb{R}$ est une fonction capacité qui associe à chaque coalition $S \in 2^N$ une capacité $v(S) \in \mathbb{R}$ et satisfaisant $v(\emptyset) = 0$

Exemple

S	∅	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1,2,3}
v(S)	0	0	0	0	0	1	1	1

Cours n°2

Stratégies dominantes

Exemple : Le pari pascalien

« Estimons ces deux cas : si vous gagnez, vous gagnez tout, si vous perdez, vous ne perdez rien. Gagnez donc qu'il est, sans hésiter »

Pascal, *Pensées*, n°233

Stratégie dominante et équilibre

Une **stratégie dominante** est la stratégie d'un joueur qui domine toutes les autres stratégies à sa disposition(c'est-à-dire qu'elle lui procure une gain plus important), quelles que soient les stratégies des autres joueurs.

Si chaque joueur dispose d'une stratégie dominante, le résultat du jeu est un **équilibre en stratégies dominantes**

Exemple

		Akita	
		Gauche	**Droite**
Joël	Gauche	3;3	0;4
	Droite	4;0	1;1

Solution

		Akita	
		Gauche	**Droite**
Joël	Gauche	3;3	**0;4**
	Droite	**4;0**	**1;1**

« Jeu de la tirelire » (1)

Je propose à deux personnes le jeu suivant :

« Chacun d'entre vous a la possibilité de mettre 0 ou 100 euros dans une tirelire, l'autre ne connaîtra pas votre décision. Ensuite j'ouvrirai la tirelire et je multiplierai par 1,5 le montant contenu dans celle-ci et je vous donnerai à chacun 50%. Ce jeu ne sera joué qu'une seule fois »

Quel est le choix d'un joueur rationnel ?

« Jeu de la tirelire » (2)

		J2	
		Mettre 0	Mettre 100
J1	**Mettre 0**	**0;0**	**75;-25**
	Mettre 100	**-25;75**	50;50

Stratégies dominées

- On distingue plus spécifiquement deux formes de domination :
  - **Stratégie strictement dominée**

$$U_i\left(\widehat{s_i}, s_{-i}\right) > U_i\left(s_i', s_{-i}\right) \qquad \forall\, s_{-i}$$

  - **Stratégie faiblement dominée**

$$U_i\left(\widehat{s_i}, s_{-i}\right) \geq U_i\left(s_i', s_{-i}\right) \qquad \forall\, s_{-i}$$

- Une stratégie strictement dominée ne va jamais être utilisée par un joueur

Jeu des 2/3 de la moyenne

- Chacun d'entre vous doit choisir un nombre entier entre 1 et 10 inclus

- Le gagnant sera le joueur qui devinera le nombre qui se rapproche le plus des 2/3 de la moyenne de tous les nombres choisis

Solution

- Choisir un nombre supérieur à 7 est une stratégie dominée car la moyenne ne peut dépasser 10 et que 2/3 de 10 font 6,66. Vous pouvez donc améliorer vos chances de gagner en disant 7 plutôt que 8,9 ou 10
- Mais comme tout joueur rationnel sait cela, les joueurs choisiront un nombre entre 1 et 7 inclus, et dès lors on ne pourra dépasser 2/3 de 7 soit 4,66. Choisir un nombre supérieur à 5 sera donc un stratégie dominée
- Par itération, s'il est de notoriété publique que personne n'utilisera une stratégie dominée, alors tous les joueurs choisiront 1

Existence et itération (1)

- **Il n'existe pas nécessairement une stratégie dominante et donc, *a fortiori*, un équilibre en stratégies dominantes**

- L'emploi de façon itérée de l'élimination des stratégies dominées s'appelle : **le processus de dominance successive**. Ce dernier ne conduit pas nécessairement à une solution unique

Existence et itération (2)

- Un joueur peut avoir des stratégies strictement dominées sans avoir une stratégie dominante

- **L'ordre d'élimination** des stratégies strictement dominées n'a aucune importance. En revanche, celui des stratégies *faiblement dominées* peut en avoir une

Exemple

	Gauche	Droite
Haut	0;1	0;0
Milieu	3;0	2;1
Bas	1;0	3;1

Solution

	Gauche	Droite
Haut	0;1	0;0
Milieu	3;0	2;1
Bas	1;0	3;1

Trouvez l'équilibre

		J2		
		G	C	D
J1	H	3;0	0;-5	0;-4
	M	1;-1	-2;-4	-3;-3
	B	2;4	-1;0	4;1

Solution

1) J2 constate que C est strictement dominée par G et D, on peut donc éliminer cette stratégie
2) J1 constate que M est strictement dominée par H et B donc on peut éliminer cette stratégie
3) J2 constate que D est strictement dominée par G donc on peut éliminer cette stratégie
4) J1 constate que B est strictement dominée par H et donc on peut éliminer cette stratégie

Equilibre : issue (H,G)

Solution

1) J2 constate que G domine strictement C et D, on peut donc les éliminer
2) J1 constate que H est meilleure que M et B

Equilibre : issue (H,G)

Exemple

		J2	
		G	D
J1	H	1;1	0;0
	C	1;1	2;1
	B	0;0	2;1

Exemple

	Gauche	Droite
Gauche	3;3	1;4
Droite	4;1	0;0

Conclusions principales

- Le concept d'**équilibre en stratégies dominantes** est très intéressant, mais son existence n'est pas toujours assurée

- En l'absence de stratégie dominante, on peut utiliser les concepts de stratégies strictement dominées et de stratégies faiblement dominées. Toutefois **le processus de dominance successive ne conduit pas toujours à un unique résultat**

Cours n°2
Cinq concepts à maîtriser

- Stratégie dominante
- Equilibre en stratégies dominantes
- Stratégie strictement dominée
- Stratégie faiblement dominée
- Processus de dominance successive

Cours n°3

Equilibre de Nash

L'équilibre de Nash (1)

- J. Nash [1950] propose un concept d'équilibre pour lequel chaque joueur maximise ses gains compte tenu de l'action supposée de l'autre
- **Un équilibre de Nash correspond donc à une issue du jeu dans laquelle *aucun joueur n'a intérêt à dévier unilatéralement* (c'est-à-dire à modifier seul sa stratégie)**

L'équilibre de Nash (2)

- Son existence ne pose généralement pas de problème (**Th : tout jeu fini a un équilibre de Nash**), contrairement à la question de son unicité
- Sa définition formelle va devoir être adaptée selon le contexte informationnel du jeu
- L'idée d'équilibre proposée par J. Nash en 1950 est aujourd'hui le concept central d'équilibre de la théorie des jeux non-coopératifs

L'équilibre de Nash (3)

Pour tout joueur *i* :

- $U_i\left(s_i^*, s_{-i}^*\right) \geq U_i\left(s_i, s_{-i}^*\right)$,

  $\forall s_i \in S_i, \forall s^* \in S^*$

- $U_i\left(MR_i\left(s_{-i}^*\right), s_{-i}^*\right) \geq U_i\left(s_i, s_{-i}^*\right)$

  $\forall s_i \in S_i, \forall s_{-i}^* \in S_{-i}^*$

L’équilibre de Nash (4)

- **Il y a équilibre de Nash lorsque tous les joueurs utilisent simultanément la meilleure réponse aux choix stratégiques des autres joueurs**
- **Deux justifications** à l’équilibre de Nash (pour plus de détails à ce sujet voir notamment K. Binmore [2015]) :
  - Des joueurs rationnels recherchent une solution rationnelle
  - Processus évolutif fait d’une succession de réussites et d’échecs

Le dilemme du prisonnier

Histoire proposée par A. Tucker en 1950

Deux personnes sont soupçonnées d'un délit et sont arrêtées par la police. Elles sont placées dans deux cellules différentes et la police demande à chacun d'eux soit d'avouer, soit de nier le délit. La décision de chacun étant prise dans l'ignorance de la décision de l'autre. La police indique simplement à chacun d'entre eux qu'en fonction de leurs réponses, les durées d'emprisonnement de chacun seront différentes.

Jeu du dilemme du prisonnier (1)

- 2 joueurs : $N = \{1,2\}$
- Chaque joueur a les deux mêmes stratégies : $S_i = \{avouer, ne\ pas\ avouer\}$
- Quatre issues du jeu sont possibles $(S = S_1 \times S_2)$ et l'on donne les paiements associés
  - (avouer ; ne pas avouer) => (4;0)
  - (ne pas avouer ; ne pas avouer) => (3;3)
  - (avouer ; avouer) => (1;1)
  - (ne pas avouer ; avouer) => (0;4)

Jeu du dilemme du prisonnier (2)

		J2	
		Ne pas avouer	Avouer
J1	Ne pas avouer	3;3	0;4
	Avouer	4;0	1;1

Jeu du dilemme du prisonnier (3)

		J2	
		Ne pas avouer	**Avouer**
J1	Ne pas avouer	3;3	**0;4**
	Avouer	**4;0**	**1;1**

Deux conclusions générales

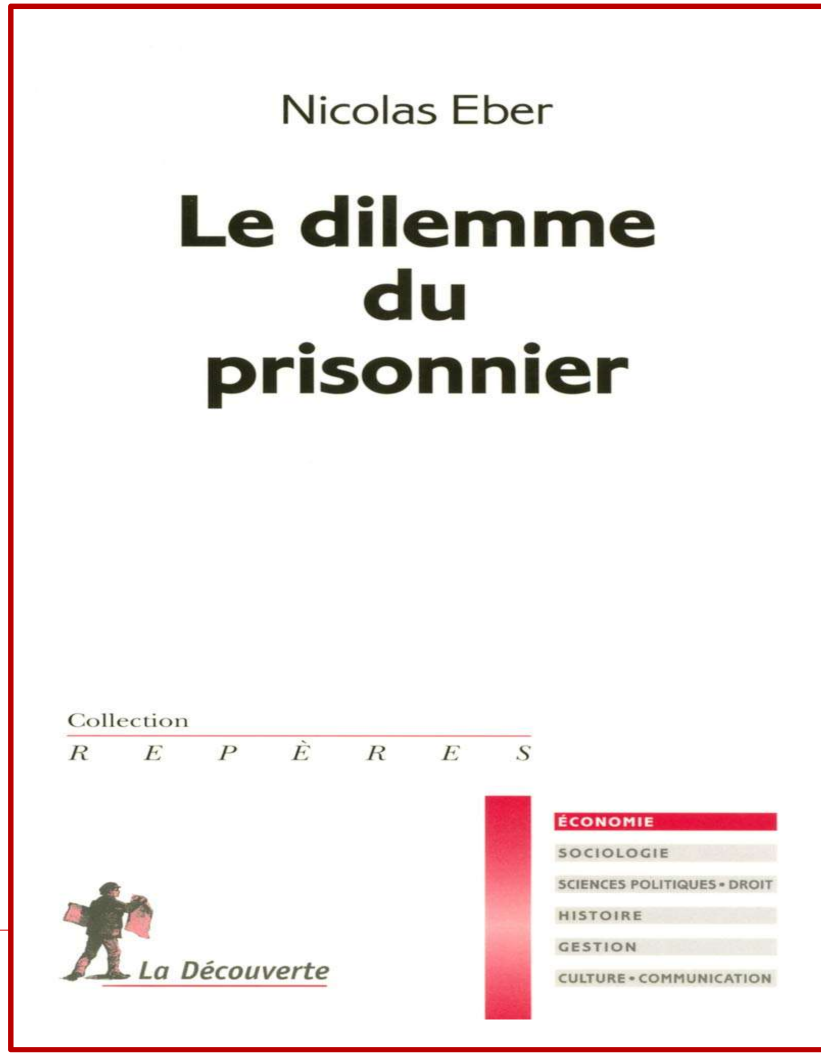
- Tout équilibre en stratégies dominantes est un équilibre de Nash (mais la réciproque est fausse)

- Un équilibre de Nash n'est pas nécessairement un optimum de Pareto

Attention
Equilibre de Nash ≠ Max de la somme

		J2	
		A	B
J1	A	5;5	100;0
	B	0;100	1;1

Conseil de lecture



Bataille des sexes (1)

		J2	
		Opéra	Boxe
J1	Opéra	2;1	0;0
	Boxe	0;0	1;2

Bataille des sexes (2)

		J2	
		Opéra	Boxe
J1	Opéra	2;1	0;0
	Boxe	0;0	1;2

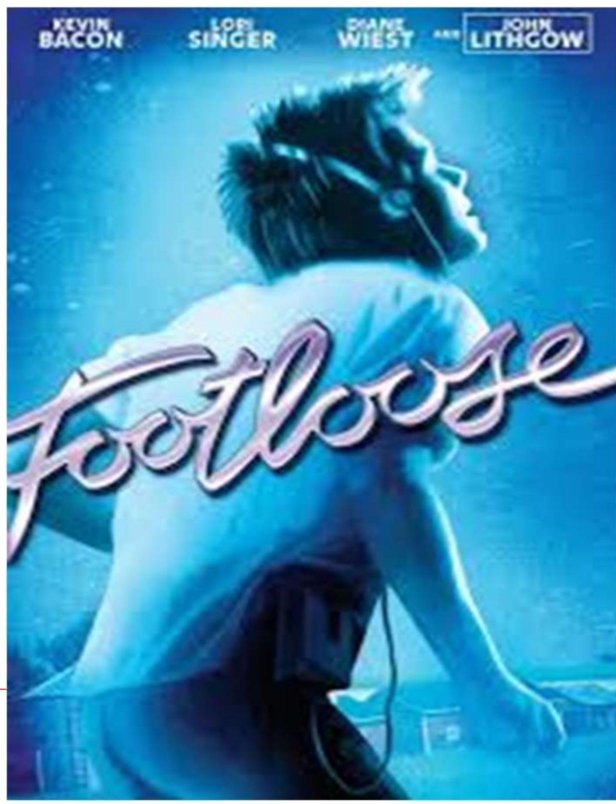
La fureur de vivre (1)

Film de 1955 avec James Dean et Nathalie Wood

Source : https://lemachiniste.ovh/category/la-fureur-de-vivre/

La fureur de vivre (2)

Voir aussi la comédie musicale *Footloose* (1984) avec Kevin Bacon (ou la version de 2011)



La fureur de vivre (3)

Deux conducteurs (A et B) dirigent leur tracteur l'une contre l'autre. Si l'un des conducteurs s'écarte de sa trajectoire, il perd la face et obtient un paiement de 0, l'autre obtenant un paiement de 4. Si les deux conducteurs s'écartent au même moment il y a égalité et chacun a un paiement de 2. Enfin, si aucun ne change de trajectoire, il y a accident et un paiement de -10 pour chacun

NB : ce jeu est souvent dénommé le « jeu de la poule mouillée »

La fureur de vivre (4)

- 2 joueurs : $N = \{A, B\}$
- Chaque joueur a les deux mêmes stratégies : $S_i = \{continuer, s'écarter\}$
- Quatre issues du jeu sont possibles $(S = S_A \times S_B)$ donc $S = \{CC, CE, EC, EE\}$
- Meilleures réponses
  - $MR_A(E) = C \qquad MR_A(C) = E$
  - $MR_B(E) = C \qquad MR_B(C) = E$

La fureur de vivre (5)

		J2	
		S'écarter	Continuer
J1	S'écarter	2;2	0;4
	Continuer	4;0	-10;-10

Autre exemple (1)

	Gauche	Droite
Haut	9;9	-100;8
Bas	8;-100	7;7

Autre exemple (2)

	Gauche	Droite
Haut	9;9	-100;8
Bas	8;-100	7;7

Autre exemple (3)

	Gauche	Droite
Haut	9;9	-100;8
Bas	8;-100	**7;7**

Matching Pennies (1)

	Pile	**Face**
Pile	-1;1	1;-1
Face	1;-1	-1;1

Trois conclusions générales

- L’équilibre de Nash est un concept plus puissant que celui d’équilibre en stratégies dominantes
- Lorsqu’il y a plusieurs équilibres de Nash, il faut utiliser la notion de **raffinement** pour trouver l’équilibre qui devrait être joué
- Tout jeu fini possède un équilibre de Nash, mais celui-ci peut ne pas être en stratégies pures

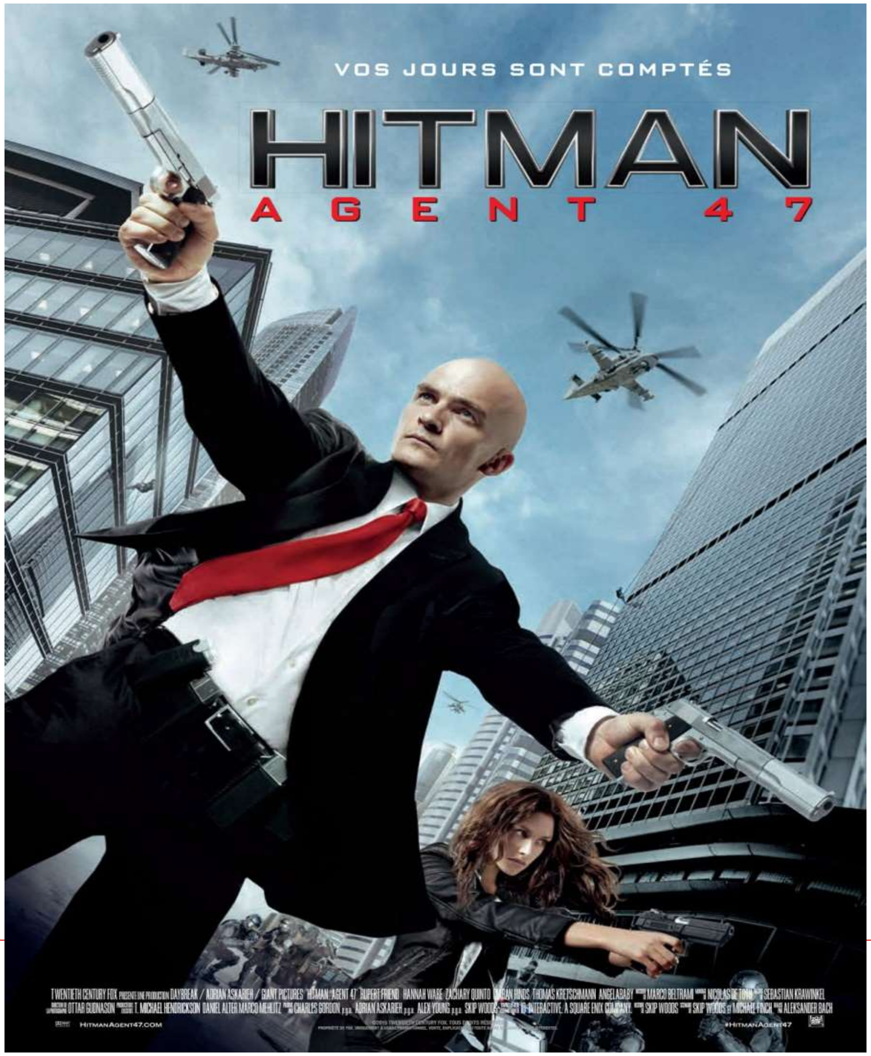
Stratégies mixtes (1)

- Une stratégie est un plan de jeu, elle spécifie ce que doit faire le joueur à chaque fois qu'il doit jouer
- On distingue :
  - Les **stratégies pures** (une action à chaque fois que le joueur doit jouer)
  - Les **stratégies mixtes** (une distribution de probabilités sur les stratégies pures du joueur à chaque fois qu'il doit jouer)

Stratégies mixtes (2)

- La notion de stratégie mixte semble apparaître pour la première fois au XVIIIème siècle avec Charles Waldegrave
- L'idée de stratégie mixte est particulièrement intéressante pour modéliser le fait que les individus cherchent parfois à être imprévisibles en rendant leurs comportements aléatoires (ex : le jeu pierre-papier-ciseaux)

Exemple : début du film de 2015



Bataille des sexes (3)

		J2	
		Opéra	Boxe
J1	Opéra	2;1	0;0
	Boxe	0;0	1;2

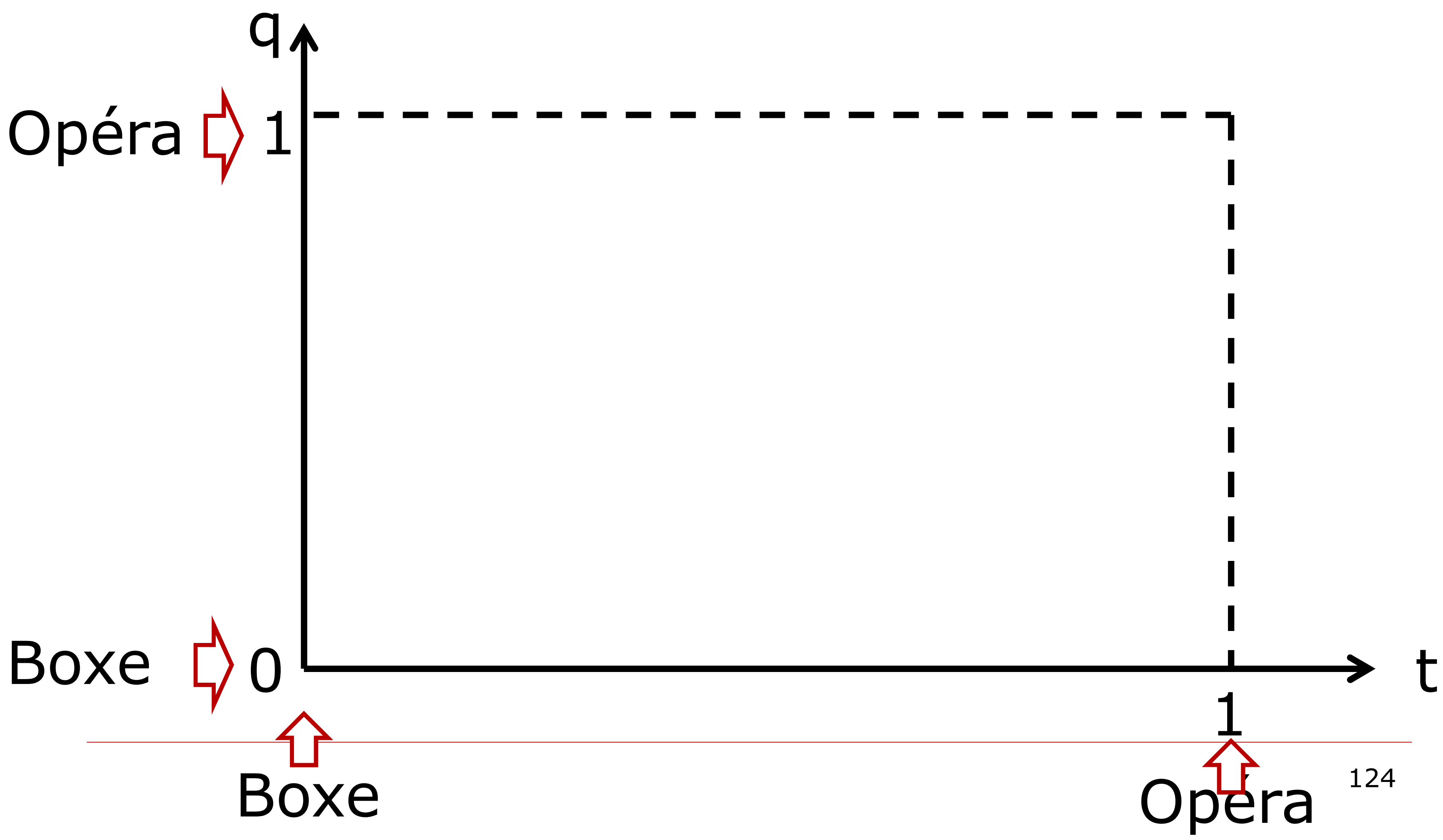
Bataille des sexes (4)

			J2	
			t	**1-t**
			Opéra	Boxe
J1	**q**	Opéra	2;1	0;0
	1-q	Boxe	0;0	1;2

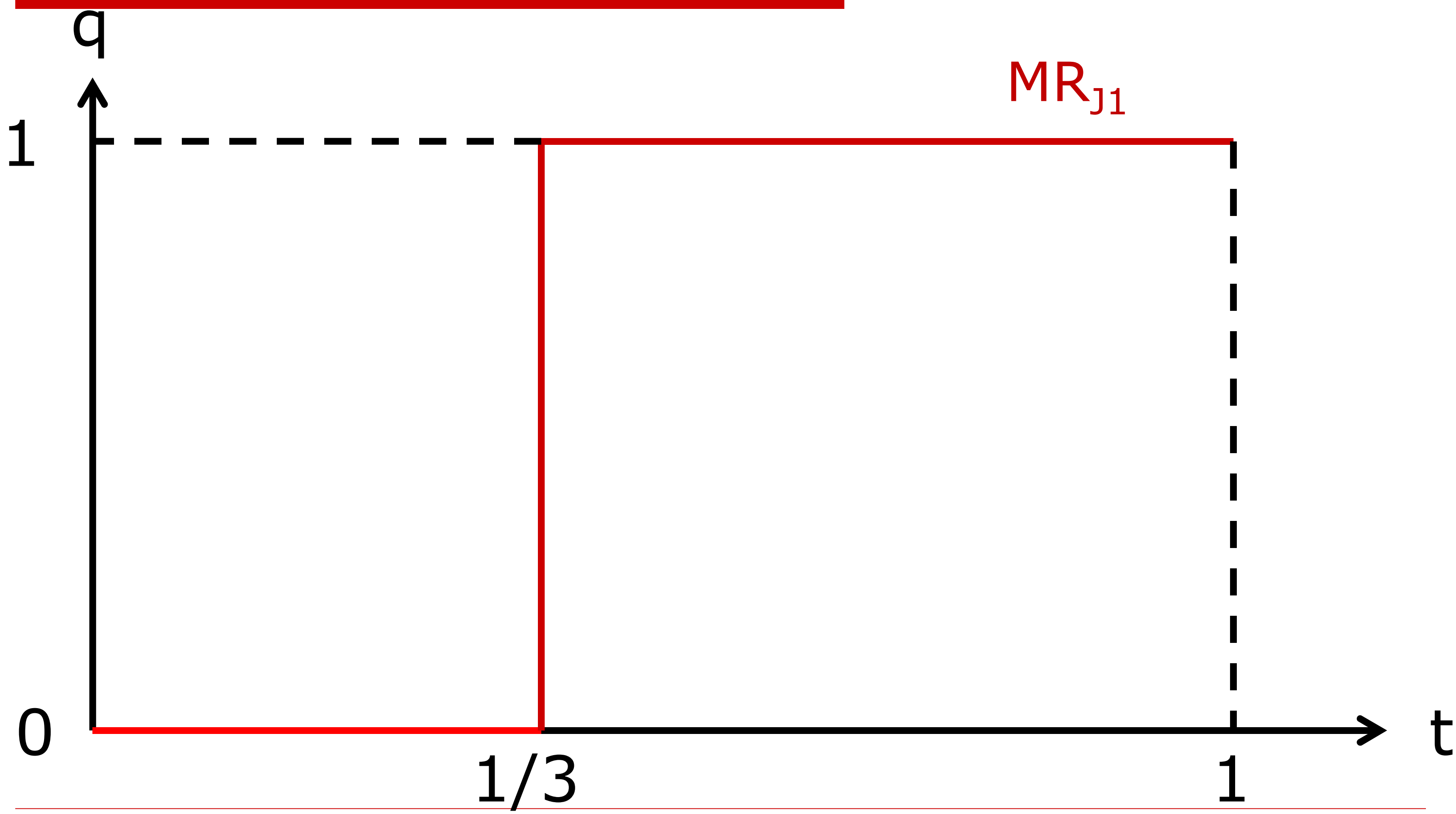
Bataille des sexes (5)

- **J1**
  - U(Opéra) = 2.t + 0.(1-t) = 2t
  - U(Boxe) = 0.t + 1.(1-t) = 1-t
  - Il y a égalité quand 2t = 1-t ⇔ t = 1/3
  - Quand t < 1/3 alors U(Boxe) > U(Opéra)
- **J2**
  - U(Opéra) = 1.q + 0.(1-q) = q
  - U(Boxe) = 0.q + 2.(1-q) = 2(1-q)
  - Il y a égalité quand q = 2(1-q) ⇔ q = 2/3
  - Quand q < 2/3 alors U(Boxe) > U(Opéra)

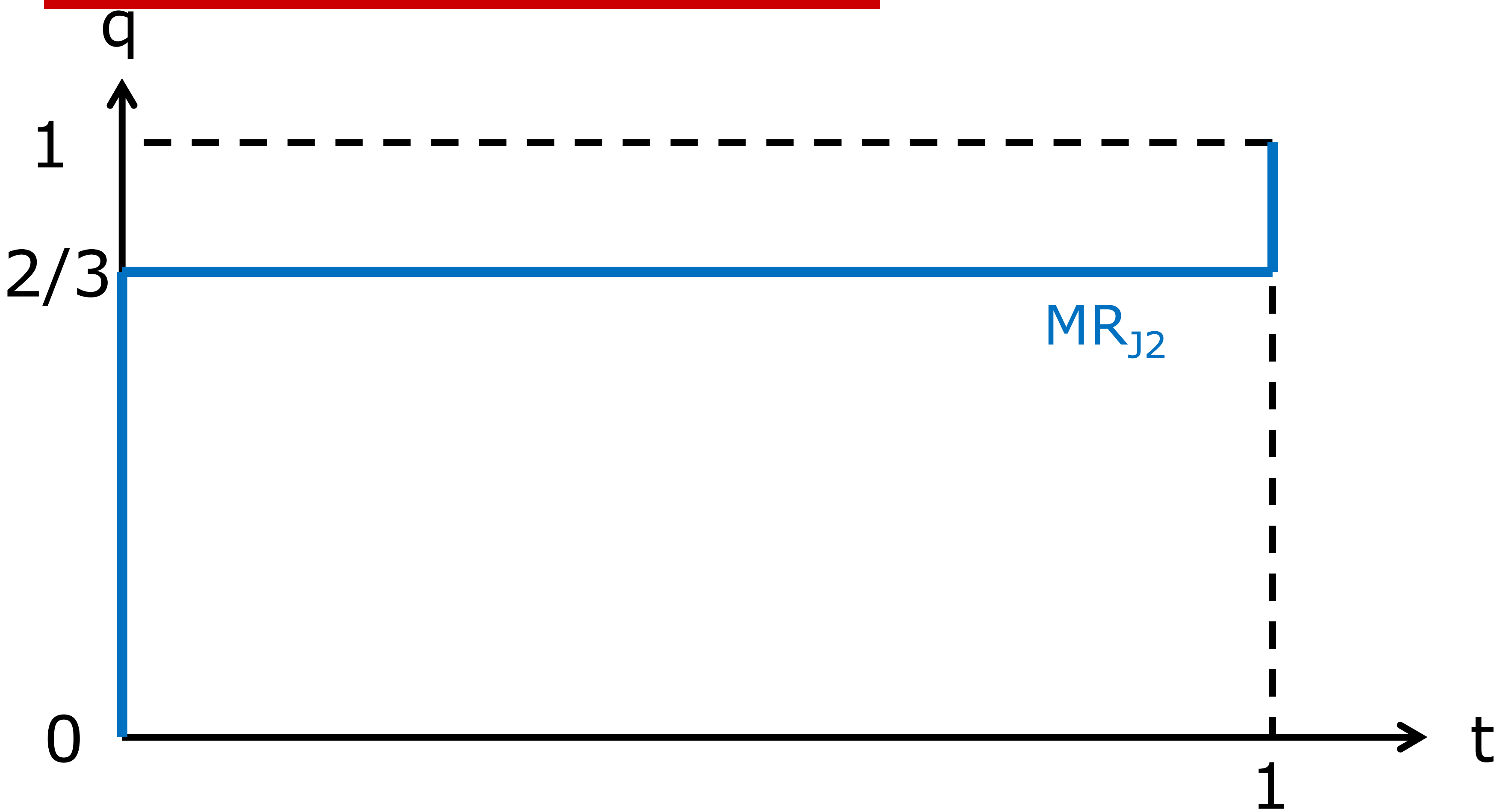
Bataille des sexes (6)



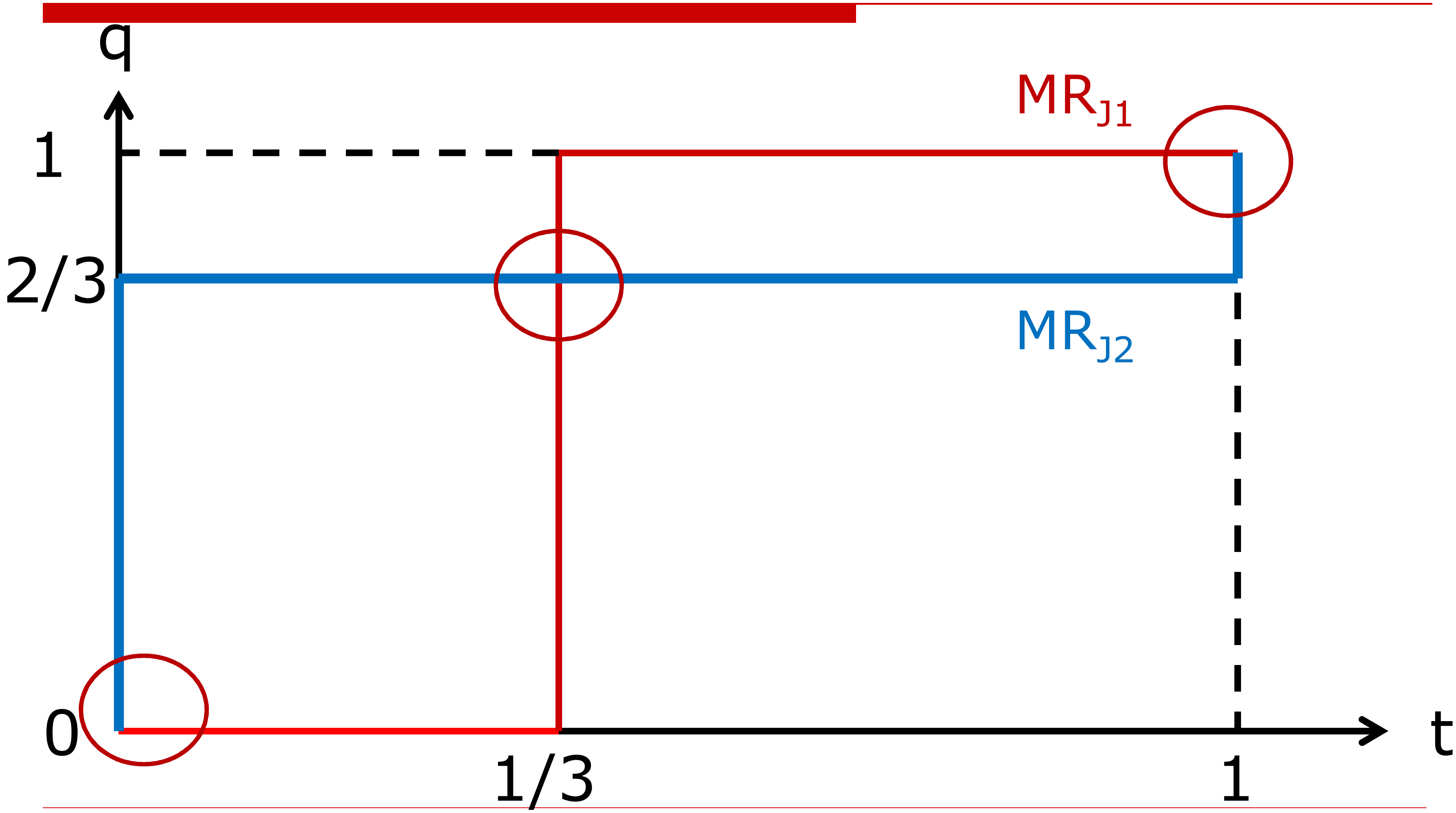
Meilleure réponse de J1



Meilleure réponse de J2



Bataille des sexes (6)



Conclusion

- Ce jeu possède trois équilibres de Nash
  - $t = 0$ et $q = 0 \Leftrightarrow$ (Boxe, Boxe)
  - $t = 1$ et $q = 1 \Leftrightarrow$ (Opéra, Opéra)
  - $t = 1/3$ et $q = 2/3$

- **Remarque générale** :

  l'équilibre en stratégies mixtes n'est pas nécessairement une combinaison équiprobable des stratégies pures

Matching Pennies (2)

	Pile	**Face**
Pile	-1;1	1;-1
Face	1;-1	-1;1

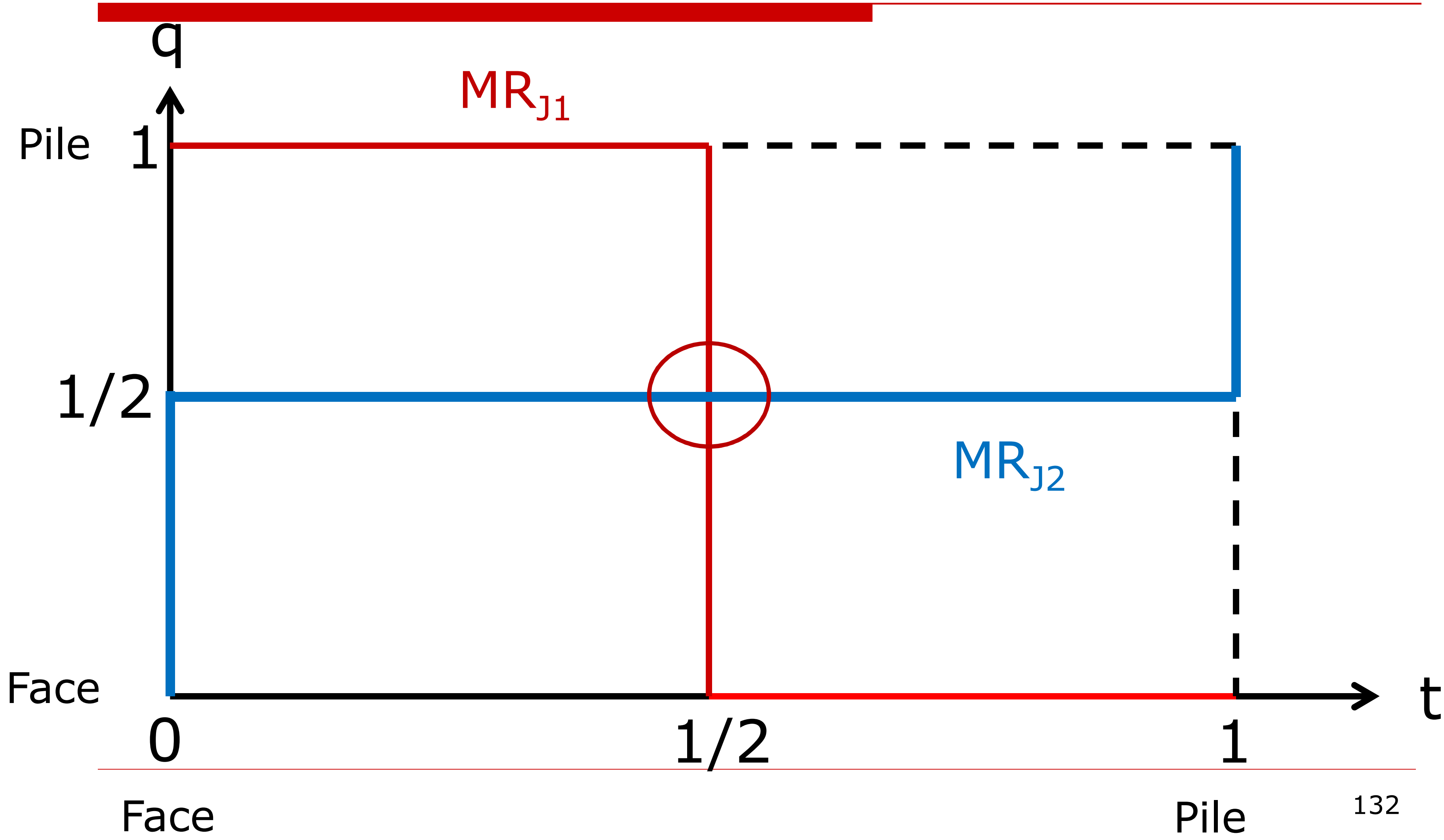
Matching Pennies (3)

		t	1-t
		Pile	Face
q	Pile	-1;1	1;-1
1-q	Face	1;-1	-1;1

Matching pennies (4)

- **J1**
  - U(Pile) = (-1).t + 1.(1-t) = -t+(1-t)
  - U(Face) = 1.t + (-1).(1-t) = t-(1-t)
  - Il y a égalité quand t = 1/2
  - Quand t < 1/2 alors U(Pile) > U(Face)
- **J2**
  - U(Pile) = 1.q + (-1).(1-q) = q-(1-q)
  - U(Face) = (-1).q + 1.(1-q) = -q+(1-q)
  - Il y a égalité quand q = 1/2
  - Quand q < 1/2 alors U(Face) > U(Pile)

Matchnig pennies (5)



Conclusion

- Ce jeu ne possède aucun équilibre de Nash en stratégies pures
- Ce jeu possède un équilibre de Nash en stratégies mixtes (1/2;1/2)
- Rappel :

  Selon le **théorème de Nash** [1950] tout jeu fini possède au moins un équilibre de Nash, le cas échéant en stratégies mixtes

Autre exemple (1)

	Gauche	Droite
Gauche	1;1	1;1
Droite	-1;-1	2;0

Autre exemple (2)

	Gauche	Droite
Gauche	1;1	1;1
Droite	-1;-1	2;0

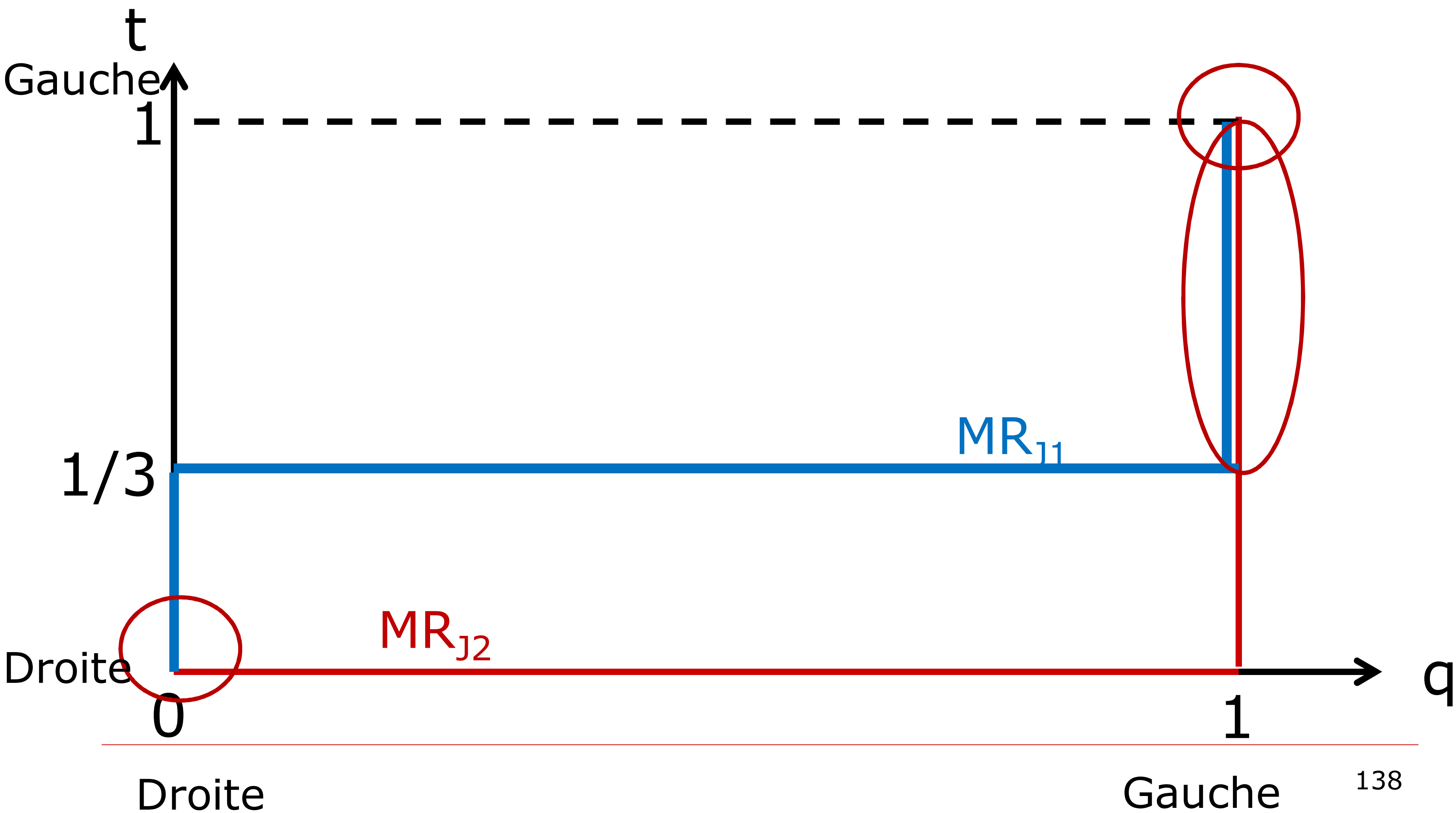
Autre exemple (3)

		t	1-t
		Gauche	Droite
q	Gauche	1;1	1;1
1-q	Droite	-1;-1	2;0

Autre exemple (4)

- **J1**
  - U(Gauche) = 1.t + 1.(1-t) = 1
  - U(Droite) = (-1).t + 2.(1-t) = 2-3t
  - Il y a égalité quand t = 1/3
  - Quand t < 1/3 alors U(Droite) > U(Gauche)
- **J2**
  - U(Gauche) = 1.q + (-1).(1-q) = 2q-1
  - U(Droite) = 1.q + 0.(1-q) = q
  - Il y a égalité quand q = 1
  - Quand q < 1 alors U(Droite) > U(Gauche)

Autre exemple (5)



Conclusion

- Ce jeu possède **deux équilibres de Nash en stratégies pures**
  - (G,G) (⇔ t = 1 et q = 1)
  - (D,D) (⇔ t = 0 et q = 0)
- Ce jeu possède **un continuum d'équilibres en stratégies mixtes**

$$\begin{cases} t \in \left[\frac{1}{3}, 1\right[\\ q = 1 \end{cases}$$

Jeux dynamiques et induction à rebours

- Jeux dynamiques => forme extensive
- **L'induction à rebours** (OU induction vers l'amont OU rétroduction OU *backward induction*) est un principe commun aux problèmes d'optimisation dynamique
- **L'induction à rebours consiste à partir de la fin du jeu puis à remonter optimalement jusqu'à l'origine**

Sous-jeux

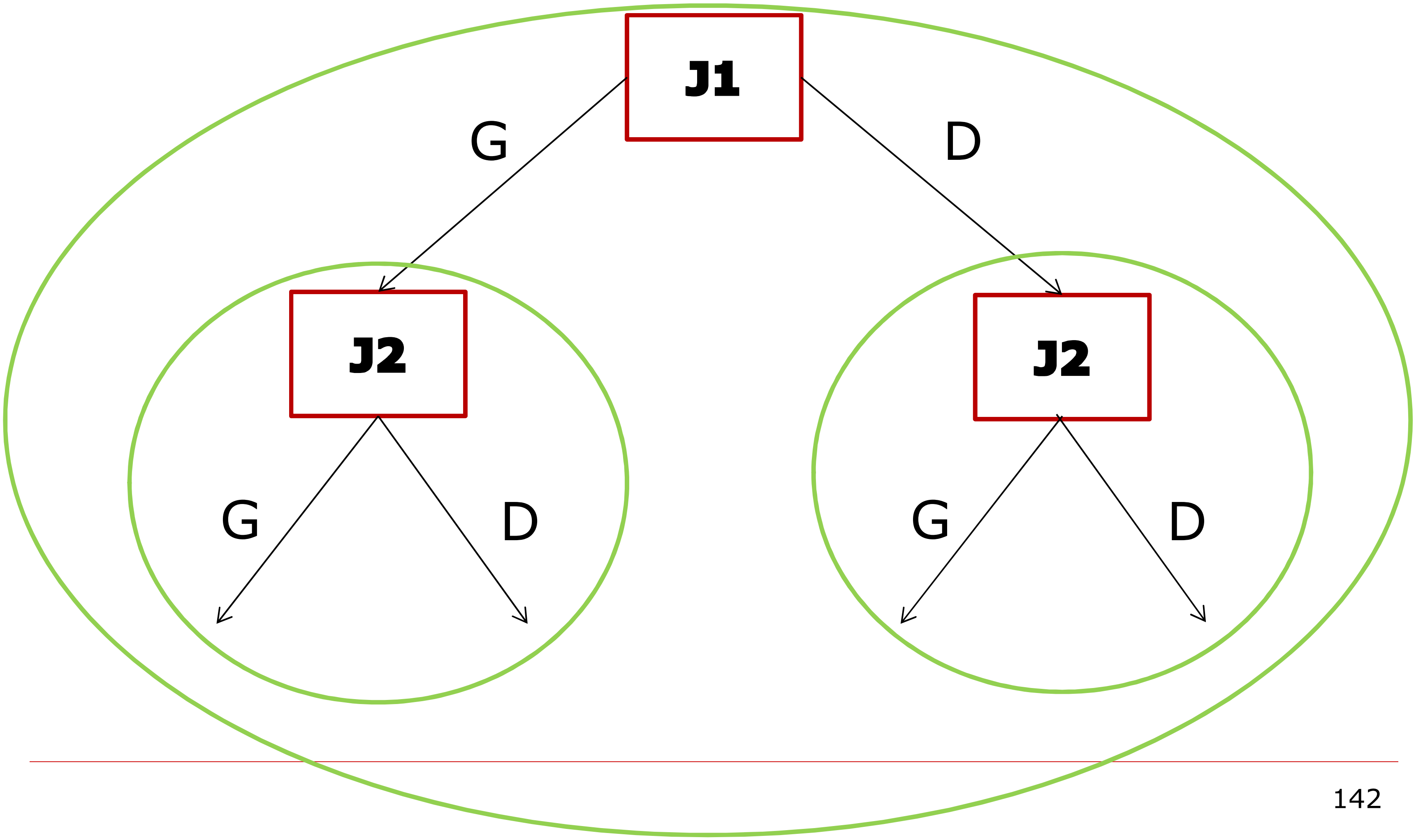
Définition :

un sous-jeu est un jeu issu du jeu originel qui part du nœud de décision (singleton) et qui comprend tous les nœuds qui en découlent directement. Aucun ensemble d'information du jeu originel n'est coupé

NB : le jeu est lui-même un sous-jeux

Voir Béal et Gabuthy [2018, p. 89] pour une définition précise

Exemple



Perfection en sous-jeux (1)

- Equilibre de Nash parfait (OU équilibre parfait OU **équilibre de Nash parfait en sous-jeux**)
- C'est un raffinement du concept d'équilibre de Nash introduit par R. Selten [1965] et qui consiste à **éliminer les équilibres de Nash qui ne sont pas crédibles pour ne laisser que celui (ou ceux) qui l'est (le sont)**

Perfection en sous-jeux (2)

- Définition : un équilibre de Nash est dit parfait en sous-jeux si et seulement si c'est un équilibre de Nash de tous les sous-jeux du jeu original considéré
- **Théorème : tout jeu dynamique fini admet au moins un équilibre de Nash parfait en sous-jeux (le cas échéant en stratégies mixtes)**

Procédure

Pour trouver un équilibre de Nash parfait en sous-jeux, il faut isoler chacun des sous-jeux du jeu initial, partir des paiements et remonter l'arbre en prenant à chaque fois la branche qui correspond à l'équilibre de Nash (c'est-à-dire remplacer chaque sous-jeux par le paiement optimal qui lui correspond)

Rappel

Une stratégie pure est un plan d’actions qui dit ce que le joueur fait dans toutes les éventualités qui pourraient survenir au cours d’une partie.

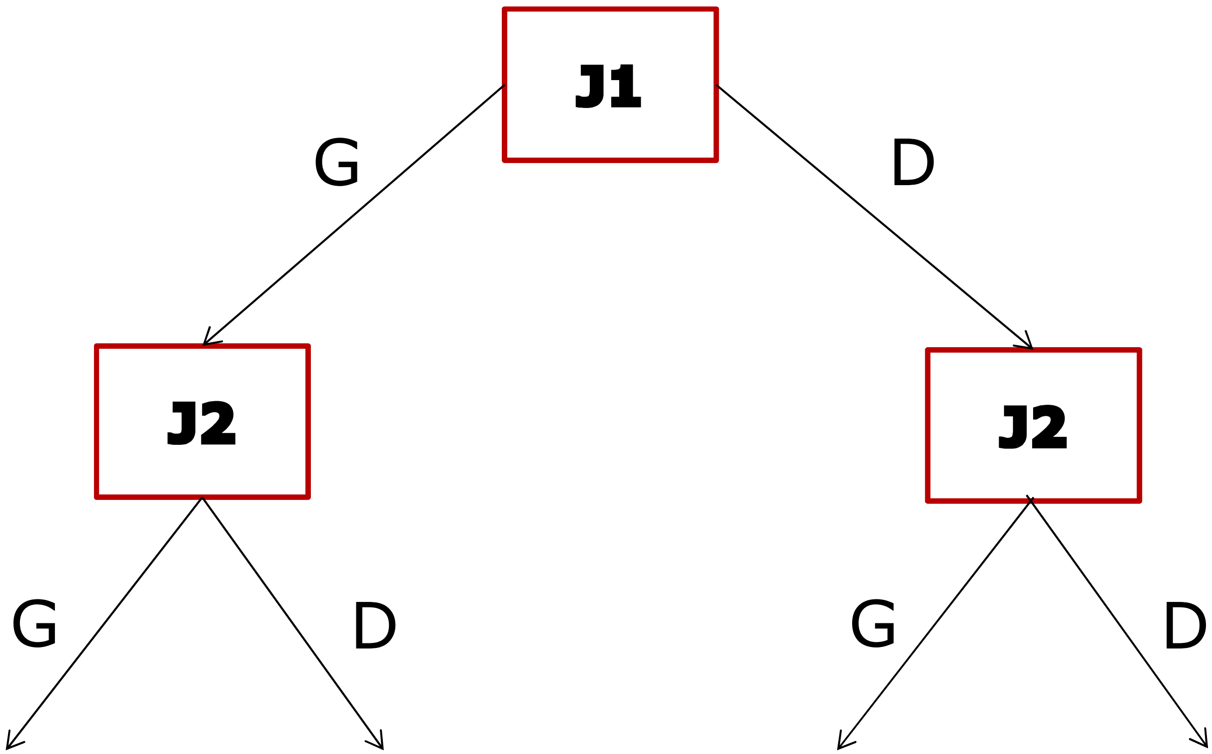
Elle spécifie une action sur chaque ensemble d’informations.

Exemple

- Soit deux joueurs J1 et J2 ayant chacun la possibilité d'aller à droite ou à gauche
- J1 joue en premier et J2 en second
- Le jeu est en information parfaite et complète

Ecrivez le jeu sous forme extensive, puis sous forme normale

Forme extensive



Forme normale

		J2			
		G,G	G,D	D,G	D,D
J1	G				
	D				

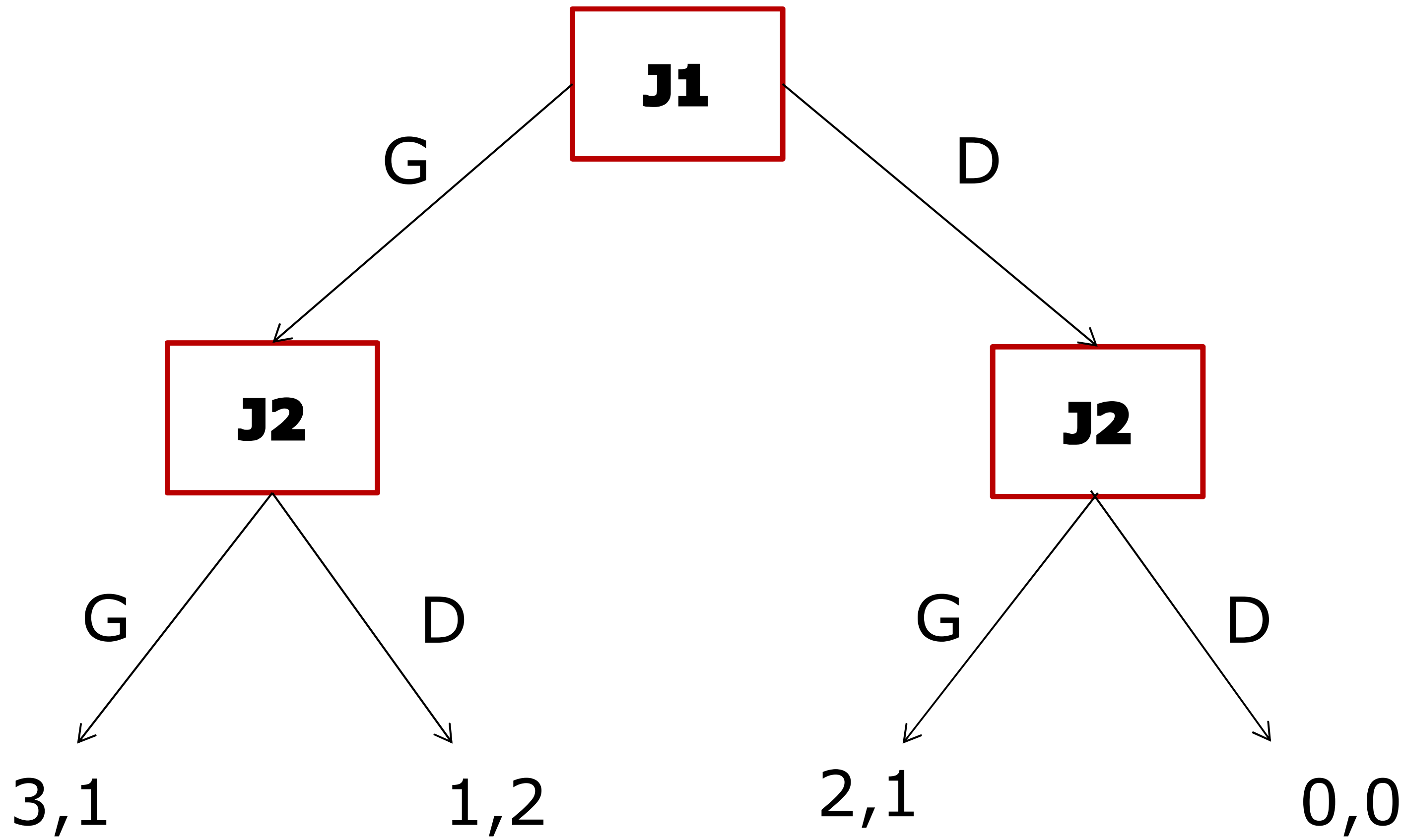
Forme normale avec paiements

		J2			
		G,G	G,D	D,G	D,D
J1	G	3,1	3,1	1,2	1,2
	D	2,1	0,0	2,1	0,0

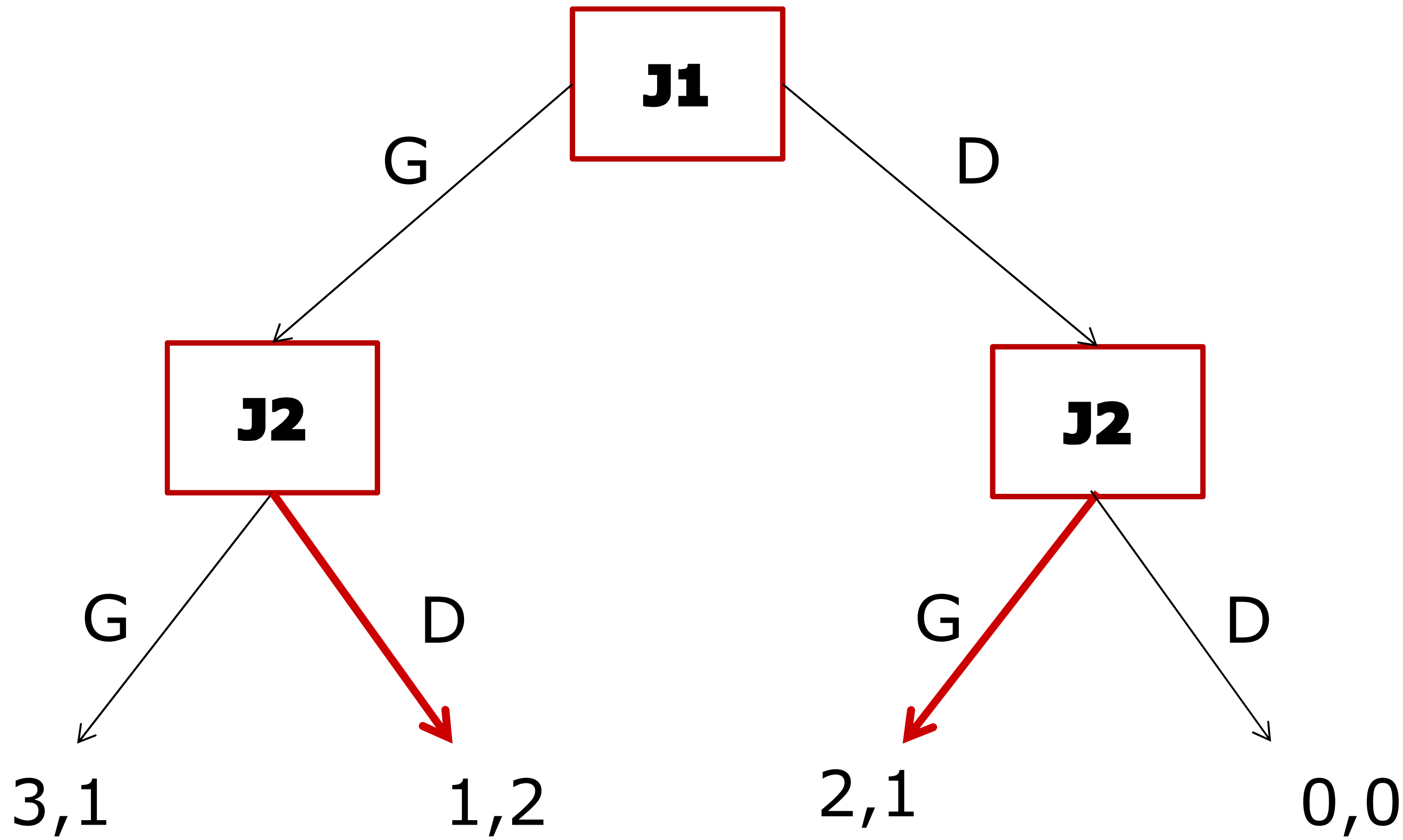
Equilibres de Nash en stratégies pures

		J2			
		G,G	G,D	D,G	D,D
J1	G	3,1	3,1	1,2	1,2
	D	2,1	0,0	2,1	0,0

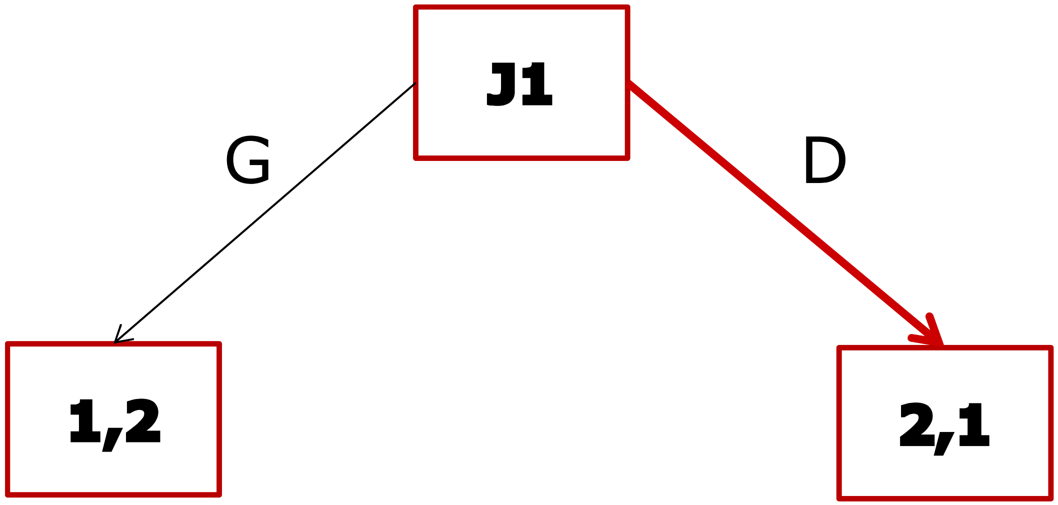
Forme extensive avec paiements



Nash parfait en sous-jeux (1)



Nash parfait en sous-jeux (2)



Conclusion

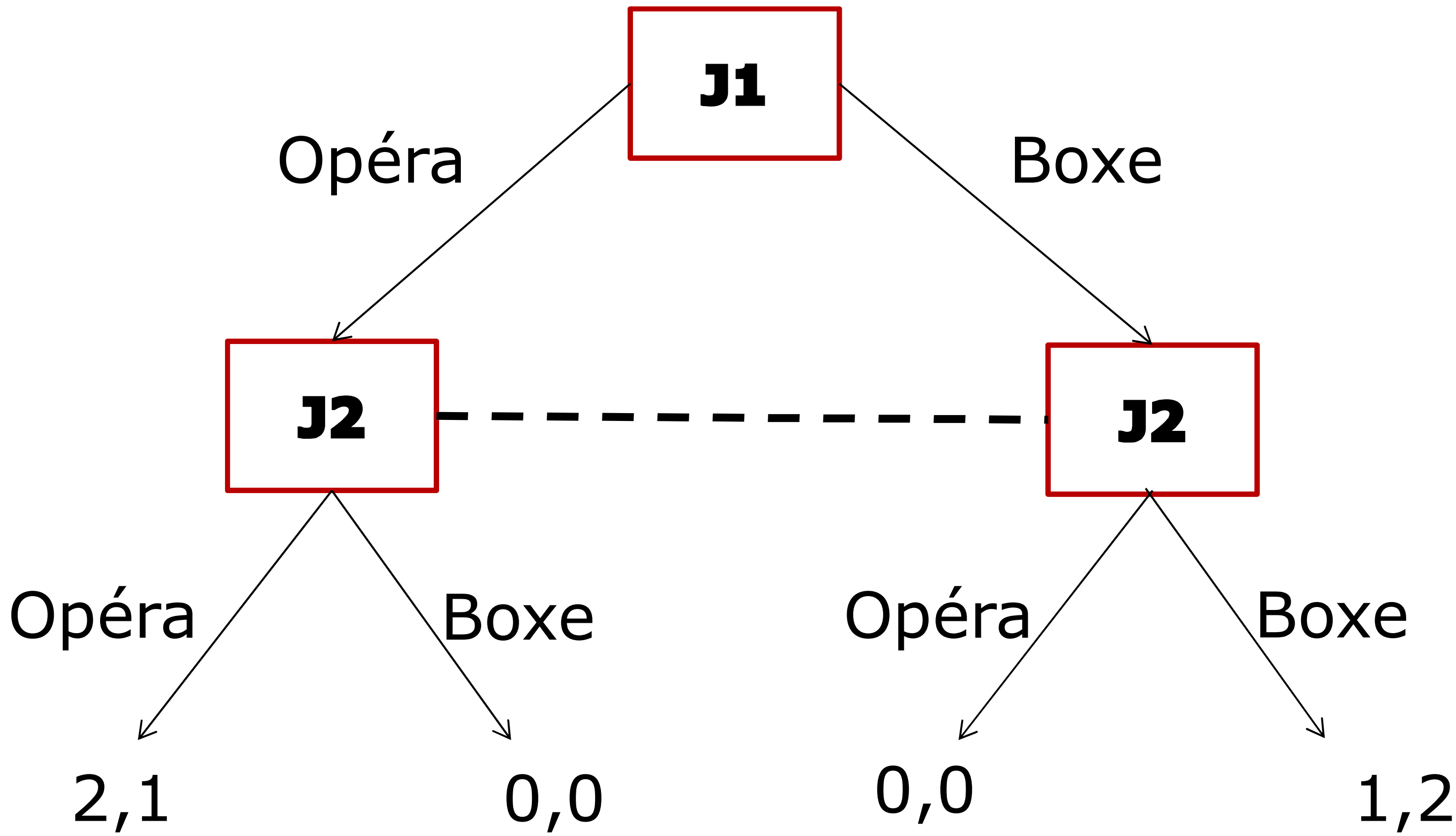
- Ce jeu possède deux équilibres de Nash en stratégies pures : (D,(D,G)) et (G, (D,D))

- En revanche il n'a qu'un seul équilibre de Nash parfait en sous-jeux (D,(D,G))

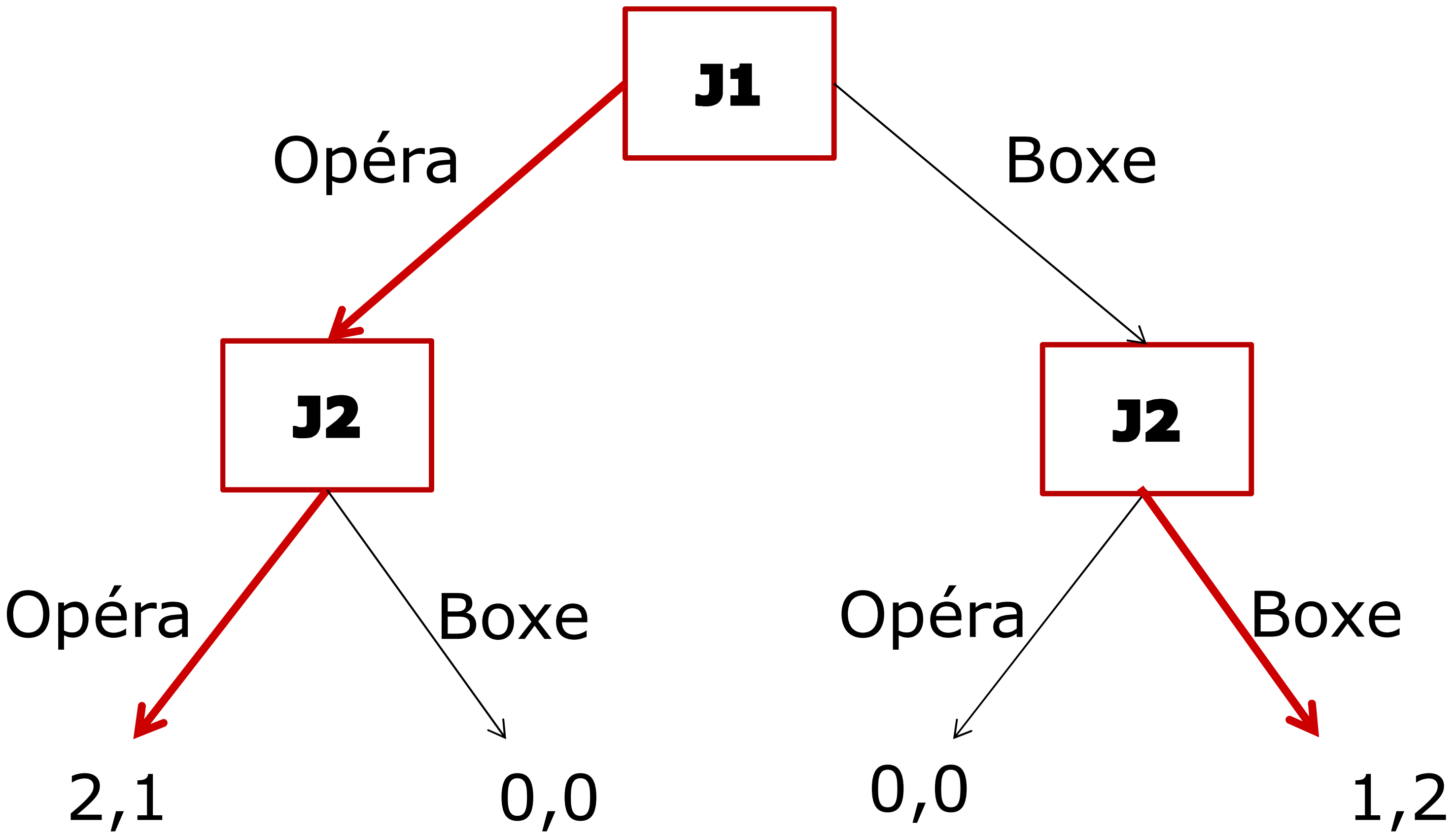
Bataille des sexes

		J2	
		Opéra	Boxe
J1	Opéra	2;1	0;0
	Boxe	0;0	1;2

Forme extensive



Jeu séquentiel



Forme normale

		J2			
		O,O	O,B	B,O	B,B
J1	O	2,1	$\boxed{2,1}$	0,0	0,0
	B	0,0	1,2	0,0	1,2

Conclusion

- Ce jeu possède trois équilibres de Nash en stratégies pures : (O,(O,O)) (O,(O,B)) et (B, (B,B))

- En revanche il n'a qu'un seul équilibre de Nash parfait en sous-jeux (O,(O,B))

Application économique

- Dans le cadre de la **problématique de l'entrée sur un marché**, la profitabilité de la firme dépend de façon cruciale des actions de la firme déjà installée
- L'une des réactions les plus agressives de la firme installée consiste à maintenir après l'entrée son niveau de production d'avant l'entrée de la nouvelle entrante : c'est le *postulat de Sylos-Labini*
- Le **modèle de A. Dixit [1982]** offre une étude des conditions de la crédibilité de cette stratégie

Rappel : concepts à posséder en jeux non-coopératifs

- Représentation sous forme normale
- Représentation sous forme extensive
- Equilibre en stratégies dominantes
- Stratégies strictement dominées
- Stratégies faiblement dominées
- Equilibre de Nash en stratégies pures
- Equilibres de Nash en stratégies mixtes
- Induction à rebours (*backward induction*)
- Equilibre de Nash parfait en sous-jeux

Cours n°4

Valeur de Shapley

Question

Comment répartir entre plusieurs joueurs les gains (ou les pertes) provenant d’un projet commun ?

Fonction caractéristique

- C'est un concept formulé par John von Neumann en 1928
- **Il s'agit de mesurer l'importance de la participation de chaque joueur au projet commun**
- *n* joueurs => 2^n-1 coalitions non-vides
- Fonction caractéristique :

$$v : 2^n \backslash \{\emptyset\} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$s \rightarrow v(s)$$

Valeur de Shapley (1)

- La valeur de Shapley donne une unique distribution des paiements
- **Chaque joueur recevra sa valeur marginale moyenne pour toutes les coalitions auxquelles il peut participer**
- La valeur de Shapley est définie axiomatiquement

Valeur de Shapley (2)

- Quatre axiomes :
  - Efficience (ou optimalité de Pareto)
  - Joueur nul
  - Symétrie
  - Additivité (ou linéarité)
- **<u>Th</u> : seule la valeur de Shapley [1953] satisfait ces quatre axiomes**
- Il existe d'autres axiomatisations de la valeur de Shapley (ex : Owen [1972], Myerson [1980] ou Young [1985])

Valeur de Shapley (3)

- **Formule de la valeur de Shapley** :

$$Sh_i = \frac{1}{n!}\sum_{\pi} \lambda_i(\pi)$$

λ_i : contribution marginale

π : une permutation donnée des *n* joueurs

- Rappel : la valeur de Shapley correspond à la somme des contributions marginales du joueur divisée par le nombre de permutations possibles

Exemple

S	∅	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1,2,3}
v (S)	0	6	10,75	13,75	15,25	18	20,5	23,5

Calcul de la valeur de Shapley

	1	2	3
1,2,3	6	9,25	8,25
1,3,2	6	12	5,5
2,1,3	4,5	10,75	8,25
2,3,1	3	10,75	9,75
3,1,2	4,25	5,5	13,75
3,2,1	3	6,75	13,75
Total (T)	26,75	55	59,25
Shapley (= T/6)	4,4583	9,1666	9,875

$$Sh(1) + Sh(2) + Sh(3) = 23,5$$

Application 1 : S. Ferey [2013]

- Dommage en droit :
  - Fait générateur
  - Préjudice
  - Lien de causalité
- Répartition des dommages civils lorsqu'il y a plusieurs co-auteurs successifs
- Proposition : utiliser la valeur de Shapley comme point de référence

Application 2 : V. Ginsburgh et I. Zang [2004]

- *Pass* pour les musées donnant accès à plusieurs musées aux visiteurs qui en sont pourvus
- Question : comment répartir entre les musées les gains liés aux *pass* ?
- Proposition : utiliser la valeur de Shapley
- Comparaison avec d'autres règles de répartition

Rappel : concepts à posséder en jeux coopératifs

- Fonction caractéristique
- Définition de la valeur de Shapley
- Axiomatique de Shapley
- Calcul de la valeur de Shapley
- Exemples d'utilisation de la valeur de Shapley

Conclusion générale

- La théorie des jeux est une **avancée majeure dans l'étude des interactions stratégiques**
- Elle a développé de nombreux concepts et outils aujourd'hui largement utilisés
- Cependant, comme le souligne K. Binmore [2015, p. 97] : « Aucun jeu n'est adéquat pour modéliser le fonctionnement des sociétés dans leur globalité. Ce ne sont que des jouets inventés pour éclaircir un point particulier »

Bibliographie (1)

Aumann, R. [2018], « Game theory », *The New Palgrave Dictionary of Economics*, Third edition, pp. 5014-5063.

Béal, S. et Gabuthy, Y. [2018], *Théorie des jeux coopératifs et non-coopératifs : application aux sciences sociales*, De Boeck.

Binmore, K. [2015], La théorie des jeux. Une introduction, Arkhe Editions.

Dixit, A. [1982], « Recent developments in oligopoly theory », *American Economic Review*, Papers and Proceedings, vol. 72, n°2, pp. 12-17.

Ferey, S. [2013], « Valeur de Shapley et répartition des dommages civils en cas de multiple co-auteurs », *Economie et Prévision*, vol. I-2, n° 202-203, pp. 37-52.

Bibliographie (2)

Gale, D. et Shapley, L. [1962], « College admissions and the stability of marriage », *American Mathematical Monthly*, vol. 69, n°2, pp. 9-15.

Ginsburg, V. et Zang, I. [2004], « The museum pass game and its value », *Games and Economic Behavior*, vol. 43, n°2, pp. 322-325

Nash, J. [1950], « Equilibrium in n-person games », *Proceding of the National Sciences of United States of America*, vol. 36, n°1, pp. 48-49.

Peters, H. [2008], *Game theory. A multi-leveled approach*, Springer.

Schelling, Th. [2007], *Les macroeffets de nos microdécisions*, Dunod.

Bibliographie (3)

Selten, R. [1965], « Spieltheoretische Behandlung eines Oligopolmodells mit Nachfragetragheit », *Zeitschrift für die gesamte Staatrwissenschaf*, vol. 121, pp. 301-324.

Shapley, L. [1953], « A value for n-person games », in *Contributions to the theory of games*, Kuhn et Tucker (eds), pp. 307-317.

Walliser, B. [2011], *Comment raisonnent les économistes. Les fonctions des modèles*, Odile Jacob.